

DSGE モデルによる非線形成長トレンドと景気循環の分離*

廣瀬康生研究会 7 期

佐藤周磨[†]

2021 年 1 月 8 日

概要

動学的確率的一般均衡 (DSGE) モデルによる多くの分析では、モデルのパラメータは時変しないと仮定されている。これは、あくまで経済構造が安定した状況をモデル化していることを意味する。Smets and Wouters (2007) などは経済成長率に関するパラメータを一定として、DSGE モデルに均斉成長トレンドを導入している。こうしたモデルは線形の成長トレンドを除去することが可能であるが、真の成長トレンドが非線形の場合、マクロ経済の景気循環分析に歪みが生じている可能性がある。本稿の目的は、時変パラメータを導入した DSGE モデルによって、日本経済の成長トレンドと景気循環を分離することである。DSGE モデルの理論統一性を保つためにディープパラメータは一定とし、技術進歩率や資本分配率といった経済構造を規定するパラメータが徐々に変化する状況をモデル化した。計量分析の分野では Teräsvirta (1994) による統計的推論の確立以来、こうしたパラメータの推移を記述する手法として平滑推移モデルが発展してきた。そこで、既存の DSGE モデルの解法や推定方法を適用するかたちで、消費の習慣形成や投資の調整コストといった摩擦要因を含む実物景気循環 (RBC) モデルと平滑推移モデルの統合を行った。日本の長期時系列マクロ経済データを用いて、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法によるパラメータのベイズ推定および Geweke (1999) の方法による周辺尤度の推計を行った結果、本稿のモデルはよりデータとの当てはまりが良いことが示された。ヒストリカル分解による景気循環の要因分解では、経済構造の変化を考慮した分析が可能であることを確認した。

JEL 分類記号：C11、C52、E32

キーワード：成長トレンド、景気循環、平滑推移モデル、MCMC 法

*本稿は 2020 年度卒業論文として執筆したものである。本稿の作成にあたっては、廣瀬康生氏 (慶應義塾大学)、研究会同期、後輩をはじめ多くの方々から有益かつ熱心なコメントを頂戴した。ここに記して感謝の意を表したい。しかしながら、本稿にあり得る誤り、主張の一切の責任はいうまでもなく筆者に帰するものである。

[†]慶應義塾大学経済学部 4 年

目次

1	はじめに	2
2	RBC モデル	4
2.1	家計	4
2.2	企業	5
2.3	政府	6
2.4	その他	6
2.5	時変パラメータ	7
2.6	トレンド除去・定常状態	7
2.7	対数線形近似・合理的期待均衡解	9
3	ベイズ推定	9
3.1	データ	10
3.2	カリブレーション・事前分布	10
3.3	状態空間モデル	14
3.4	尤度の評価	15
3.5	推定アルゴリズム	16
3.6	事後分布	18
3.7	周辺尤度	21
3.8	ヒストリカル分解	21
4	結びにかえて	23
	参考文献	27
	データ出典	28
	補論：対数線形近似	30

1 はじめに

家計の効用最大化問題や企業の利潤最大化問題などのミクロ経済学的基礎付けを備えた動学的確率的一般均衡 (DSGE) モデルは、ルーカス批判などの伝統的マクロ経済モデルに対する批判を回避するかたちでは発展してきた。多くの DSGE モデルによる分析では、モデルのパラメータは時変しないと仮定されており、これは経済構造が安定した状況をモデル化していることを意味する。そもそも DSGE モデルは政策スタンスなどに依存しないディープパラメータの値を固定して分析を行えるモデルである。しかし、技術進歩率や資本分配率などのパラメータは、期間を通じた変化を考慮するべきである。Smets and Wouters (2007) などは経済成長率に関するパラメータを一定として、DSGE モデルに均斉成長トレンドを導入している。こうしたモデルは線形の成長トレンドを除去することが可能であるが、真の成長トレンドが非線形の場合、マクロ経済の景気循環分析に歪みが生じている可能性がある。また、Karabarbounis and Neiman (2013) は、1975 年から 2010 年の期間を対象とし、これらの期間において 15 年以上データが利用できる 59 カ国のうち日本を含む 42 カ国の労働分配率が低下傾向にあることを見出している。人工知能 (AI) やロボット技術などによる生産要素の代替が進む中、今後さらなる労働分配率の低下が予想される。その他にも、税制度や人口構成などは長期的に変化する可能性がある。このようなパラメータの変化は構造変化と捉えることが可能であり、モデルの推定に使用する時系列データの観測期間が長くなるほど経済における構造変化の影響は大きくなる。上述のような構造変化を考慮することが可能な時変パラメータ (time-varying parameter) を DSGE モデルに導入し、日本経済の成長トレンドと景気循環の分離を行った点が本稿の意義である。

まず、時変パラメータを含む時系列モデルが提案されてきた経緯と既存研究を整理する。時変パラメータは、Sims (1980) を先駆けに経済分析ツールとして広く用いられてきたベクトル自己回帰 (VAR) モデルの 1 つの拡張として提案された。その背景には、経済構造や経済主体の選好の変化が経済変数間の関係に影響を及ぼす可能性が指摘されていたことがある。こうした指摘に伴い、係数が自己回帰過程などに従って時変する VAR モデルが開発されてきた¹。また、計量経済学の分野において、状態変化を伴う代表的なモデルとしては以下の 3 つが挙げられる。閾値 (threshold) モデル、平滑推移 (smooth transition) モデル、そしてマルコフ転換 (Markov switching) モデルである。閾値モデルとマルコフ転換モデルでは、経済の状況に関するいくつかのレジームを想定し、モデルのパラメータはそのレジームごとに異なる値を持つ。特にマルコフ転換モデルは、好不況や人々の心理的な局面などの観測することが難しい経済のレジームを捉えることができるとされており、ファイナンスや経済分析に広く応用されている。DSGE モデルへの応用としては、Foerster et al (2014) や、Liu and Mumtaz (2011) などがマルコフ転換 DSGE モデルを用いた分析を行っている。平滑推移モデルは、観測期間内にパラメータの値が徐々に変化していると仮定するモデルであり、緩やかな状態変化を表現することができる。同モデルは Teräsvirta (1994) による統計的推論の確立以来、発展してきた。平滑推移モデルを経済学へ応用させた例としては、Kasuya (2003) や Caggiano, Castelnuovo, and Figueres (2017) が挙げられ、いずれも VAR モデルを用いた分析を行っている。Kasuya (2003) は平滑推移 VAR モデルを用いて、金融政策が実体経済に与える効果の状況による変化を分析しており、景気や貸出市場の貸出態度によって金融政策の効果の変化が有意に検出された。その他にも、VAR モデルへの応用は数多く存在する。その背景には、VAR モデルのパラメータは経済学的基礎付けがなされて

¹例えば、Sims (1993) などによって、パラメータが自己回帰過程に従う VAR モデルの推定が行われた。実証分析において同モデルが利用された例としては、Cogley and Sargent (2002) が挙げられる。

いないことが多く、時変パラメータに対する理論的制約は限定的であることなどが挙げられる。高度な理論統一性を備えた DSGE モデルへの応用は敬遠されてきたが、本稿では、既存の DSGE モデルの解法や推定方法を適用するかたちで、DSGE モデルに平滑推移モデルを導入した。

本稿の目的は、平滑推移モデルと DSGE モデルを統合し、日本経済の非線形成長トレンドを考慮した景気循環分析を行うことである。日本の長期時系列マクロ経済データを用いて、実物景気循環 (RBC) モデルの推定および、同モデルによる分析を行った。かつては、RBC モデルではデータから観察される労働量と労働生産性の負の関係を表現できないことが指摘されていたが、Jesper (2004) は確率的トレンドをモデルに導入することでこの関係を描写できることを示している。また、データとの当てはまりを向上させるためには、モデルに消費の習慣形成や投資の調整費用といった摩擦要因を組み込む必要があることが Jesper (2004) によって指摘されている。そこで、本稿では Jesper (2004) のモデルをベースに、いくつかの摩擦要因を追加した RBC モデルを構築した。

本稿では、時変パラメータを含む RBC モデルの推定を行う。時変パラメータの推定を行う際には、そのパラメータの変化が内生変数と結びついているかが重要になる。パラメータの変化が内生変数の動きに依存している場合、モデルは非線形になるため、尤度関数は極めて複雑になり最尤推定が困難になる。本稿では、既存の線形 DSGE モデルの推定法を適用するために、パラメータの推移はモデルの内生変数の動きとは独立で、かつ決定的 (deterministic) に推移すると仮定した。つまり、線形で誤差項が正規分布に従うモデル (線形ガウシアン状態空間モデル) を扱うため、既存の最尤推定法が適用可能である。また、本稿ではベイズ推定法を用いる。ニューケインジアンモデルや RBC モデルといった DSGE モデルのパラメータはミクロ・マクロ経済学的基础付けがあり、そうした理論と整合的な形で推定を行うためにベイズ推定が一般的に用いられている。DSGE モデルのベイズ推定を行う場合は、パラメータの事後分布を解析的に求めることが困難であるため、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法と呼ばれるサンプリング手法によって推定が行われている。本稿のパラメータ推定においても、この手法を用いる。

上記のような理論モデルを構築し、パラメータの推移を考慮しない従来のモデル (モデル I) とパラメータを推移させるモデル (モデル II) の 2 つを推定し、比較を行った。ベイズ推定されたモデルを評価する指標の 1 つである周辺尤度を Geweke (1999) の方法で推計した結果、モデル II はモデル I よりデータとの当てはまりが良いモデルであることが明らかになった。また、2 つのモデルを用いてヒストリカル分解による景気循環の要因分解を行ったところ、以下の理由により、モデル I による分析では景気循環分析に誤ったシグナルを発する可能性がある一方で、モデル II は経済構造の変化を考慮した分析が可能であることが分かった。まず、モデル II が示唆する景気循環の主要因が Kydland and Prescott (1982) などの RBC 理論に関する既存研究と概ね整合的であった。さらに、各年代ごとに景気循環を分析する際に、モデル I では高度経済成長期やバブル経済期などの評価に歪みが生じることが明らかになった。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節で Jesper (2004) のモデルをベースに消費の習慣形成や投資の調整費用、税制度などの摩擦を組み込んだ RBC モデルを構築し、第 3 節ではパラメータ推定およびヒストリカル分解による日本経済の景気循環の要因分解を行う。第 4 節は結語であり、今後の課題などを述べる。

2 RBC モデル

本稿では、Jesper (2014) の RBC モデルを参考にする。Jesper (2014) は、Galí (1999) などの実証研究で確認された労働量と労働生産性の負の関係を描写するようなモデルの構造を研究しており、確率的トレンドを導入することがデータが示唆する経済変数間の関係を表現する 1 つの方法であることを示している。また、データとの当てはまりをさらに向上させるための他の摩擦要因の必要性を主張しており、本稿では Jesper (2014) のモデルをベースに、消費の習慣形成、投資の調整費用、税制度といった摩擦を組み込んだ RBC モデルを構築する。RBC モデルでは物価が伸縮的な世界を仮定しており、変数は全て実質値で表される。本稿のパラメータ推定では年次データを用いる。年単位では、価格はある程度伸縮的であると考えられるため、RBC モデルの使用には妥当性がある。経済には家計、企業および政府が存在する。企業によって生産された財は家計の消費、投資または外生需要項目で使用される。政府は所得税・消費税・一括税による徴税、財政支出および海外との貿易を行っている。

2.1 家計

家計 $h \in [0, 1]$ は、消費財 $C_t(h)$ 、投資財 $I_t(h)$ 、を購入し、労働サービス $l_t(h)$ を企業に提供する。家計は Smets and Wouters (2003) や Erceg, Guerrieri, and Gust (2006) を参考に、次のような均斉成長トレンドを考慮した効用関数の最大化問題に直面するものとする。

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left\{ \frac{(C_{t+j}(h) - \theta C_{t+j-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} y^\sigma - \frac{Z_{t+j}^{1-\sigma} l_{t+j}(h)^{1+\chi}}{1+\chi} y^{-\chi} \right\}.$$

ここで、 E_t は期待オペレータ、 $\beta \in (0, 1)$ は主観的割引率、 $\sigma > 0$ は消費に関する異時点間代替の弾力性の逆数、 $\theta \in (0, 1)$ は消費者の習慣形成の程度、 $\chi > 0$ は労働供給の弾力性の逆数を表す。 $C_t(h)$ は家計 h の消費であるが、 C_t は経済全体の総消費を表す。すなわち、家計は自らの消費ではなく、総消費に基づいて消費の習慣形成を行うと仮定する。 y はトレンド除去後の生産量の定常値であり、後の計算を簡単にする工夫である。 Z_t は均斉成長を規定する技術水準であり、労働の不効用に関する項にこれが掛かっていることに注意されたい。これはモデルが均斉成長制約を満たすための工夫である。家計の予算制約式は次のように与えられる。

$$(1 - \tau_t^i) (W_t l_t(h) + r_t K_{t-1}(h)) - T_t(h) = (1 + \tau_t^c) C_t(h) + I_t(h).$$

ここで、 W_t は賃金、 r_t は資本のレンタル料、 $K_{t-1}(h)$ は資本ストック、 $T_t(h)$ は政府による一括税を表す。 τ_t^i 、 τ_t^c はそれぞれネットの所得税率、消費税率を表しており、以下のような 1 階の自己回帰過程に従うと仮定する。

$$\tau_t^i - (\tau^i)_t = \rho_{\tau^i} \left(\tau_{t-1}^i - (\tau^i)_{t-1} \right) + \epsilon_t^{\tau^i}, \epsilon_t^{\tau^i} \sim N(0, \sigma_{\tau^i}^2). \quad (1)$$

$$\tau_t^c - (\tau^c)_t = \rho_{\tau^c} \left(\tau_{t-1}^c - (\tau^c)_{t-1} \right) + \epsilon_t^{\tau^c}, \epsilon_t^{\tau^c} \sim N(0, \sigma_{\tau^c}^2). \quad (2)$$

なお、括弧で囲われた文字は、 t 期のパラメータまたは内生変数の定常値を表しており、 $(\tau^i)_t$ 、 $(\tau^c)_t$ はそれぞれ t 期の所得税率と消費税率の定常値である。各変数の定常値はパラメータや

他の変数の定常値から内生的に定まる。本稿では、パラメータの推移を仮定しているため、各変数の定常値も推移することになる。投資は、次のように資本ストックとして蓄積される。

$$K_t(h) = (1 - \delta) K_{t-1}(h) + e^{z_t^i} \left\{ 1 - \frac{(\zeta)_t}{2} \left(\frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} \frac{1}{(z)_t} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_{t-1}}{\left(\frac{i}{y}\right)_t} - 1 \right)^2 \right\} I_t(h). \quad (3)$$

δ は資本減耗率、 z_t^i は投資の限界効率ショック、 $(z)_t$ は技術進歩率（恒久的技術ショック（permanent technology shock、以後 PT ショック） z_t^z の影響を除いたグロスの技術水準成長率）、 $(i/y)_t$ は投資の対 GDP 比の定常値、 $(\zeta)_t > 0$ は投資の調整費用に関するパラメータである。予算制約式に関するラグランジュ乗数を $\Lambda_t(h)$ 、式 (3) に関するラグランジュ乗数を $\Lambda_t^k(h)$ 、 $q_t(h) = \Lambda_t^k(h) / \Lambda_t(h)$ をトービンの q （資産の実質価格）とすると、1 階の条件は次のようになる。なお、完備保険市場を仮定することで全ての家計は同質とみなすことができるため、インデックス (h) は省略する。

消費の限界効用

$$(1 + \tau_t^c) \Lambda_t = \left(\frac{C_t}{y} - \theta \frac{C_{t-1}}{y} \right)^{-\sigma}, \quad (4)$$

投資関数

$$1 = q_t e^{z_t^i} \left\{ 1 - \frac{(\zeta)_t}{2} \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{1}{(z)_t} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_{t-1}}{\left(\frac{i}{y}\right)_t} - 1 \right)^2 - \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{1}{(z)_t} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_{t-1}}{\left(\frac{i}{y}\right)_t} - 1 \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{(\zeta)_t}{(z)_t} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_{t-1}}{\left(\frac{i}{y}\right)_t} \right\} \\ + \beta E_t \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} q_{t+1} e^{z_{t+1}^i} \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \frac{1}{(z)_{t+1}} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_t}{\left(\frac{i}{y}\right)_{t+1}} - 1 \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \frac{(\zeta)_{t+1}}{(z)_{t+1}} \frac{\left(\frac{i}{y}\right)_t}{\left(\frac{i}{y}\right)_{t+1}}, \quad (5)$$

トービンの q

$$q_t = \beta E_t \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left\{ (1 - \tau_{t+1}^i) r_{t+1} + (1 - \delta) q_{t+1} \right\}, \quad (6)$$

労働の限界不効用

$$(1 - \tau_t^l) W_t \Lambda_t = Z_t^{1-\sigma} \left(\frac{l_t}{y} \right)^\sigma. \quad (7)$$

2.2 企業

企業は家計によって提供された労働サービス l_t と資本ストック K_{t-1} を用いて財 Y_t を生産する。企業の生産関数は、次のようなコブダグラス型生産関数を仮定する。

$$Y_t = Z_t^{1-(\alpha)_t} e^{z_t^a} l_t^{1-(\alpha)_t} K_{t-1}^{(\alpha)_t}. \quad (8)$$

ここで、 $(\alpha)_t \in (0, 1)$ は資本分配率、 z_t^a は一時的技術ショック（temporary technology shock、以後 TT ショック）を表している。技術水準 Z_t は、次の確率過程に従うと仮定する。

$$\ln Z_t = \ln(z)_t + \ln Z_{t-1} + z_t^z.$$

つまり、PT ショック z_t^z は t 期の技術進歩率 $(z)_t$ への外生ショックを表す。上記の生産技術の下、企業は賃金 W_t と資本のレンタル料 r_t を所与として、利潤を最大化するように労働サービス l_t と資本ストック K_{t-1} の投入量を決定する。1 階の条件は次のように表される。

労働需要関数

$$(1 - (\alpha)_t) Z_t^{1-(\alpha)_t} e^{z_t^a} l_t^{-(\alpha)_t} K_{t-1}^{(\alpha)_t} = W_t, \quad (9)$$

資本ストック需要関数

$$(\alpha)_t Z_t^{1-(\alpha)_t} e^{z_t^a} l_t^{1-(\alpha)_t} K_{t-1}^{(\alpha)_t-1} = r_t. \quad (10)$$

2.3 政府

政府の予算制約式は以下のように与えられる。

$$G_t = R_t^i + R_t^c + T_t.$$

ここで、 G_t は政府支出および純輸出などの外生需要、 R_t^i は所得税収、 R_t^c は消費税収を表し、トレンド除去後の外生需要の定常値を $(g)_t$ とすると、それぞれ次のように定義される。

$$\ln \frac{G_t}{Z_t(g)_t} = \rho_g \ln \frac{G_{t-1}}{Z_{t-1}(g)_{t-1}} + \epsilon_t^g, \epsilon_t^g \sim N(0, \sigma_g^2), \quad (11)$$

$$R_t^i = \tau_t^i (W_t l_t + r_t K_{t-1}), \quad (12)$$

$$R_t^c = \tau_t^c C_t. \quad (13)$$

2.4 その他

家計の予算制約式、政府の予算制約式、式 (12)、(13) および三面等価 $Y_t = W_t l_t + r_t K_{t-1}$ から次の資源制約式を得る。

$$Y_t = C_t + I_t + G_t. \quad (14)$$

労働生産性 Γ_t は次のように定義される。

$$\Gamma_t = \frac{Y_t}{l_t}. \quad (15)$$

その他の構造ショック（PT ショック z_t^z 、TT ショック z_t^a 、投資の限界効率ショック z_t^i ）は以下のような 1 階の自己回帰過程に従うと仮定する。

$$z_t^z = \rho_z z_{t-1}^z + \epsilon_t^z, \epsilon_t^z \sim N(0, \sigma_z^2), \quad (16)$$

$$z_t^a = \rho_a z_{t-1}^a + \epsilon_t^a, \epsilon_t^a \sim N(0, \sigma_a^2), \quad (17)$$

$$z_t^i = \rho_i z_{t-1}^i + \epsilon_t^i, \epsilon_t^i \sim N(0, \sigma_i^2). \quad (18)$$

2.5 時変パラメータ

本稿ではディープパラメータ以外の一部のパラメータが内生変数とは独立かつ決定的に推移することを許容している。こうした状況を扱うモデルの1つとして平滑推移モデルがあり、Teräsvirta (1994) が統計的推測を確立して以来、さまざまなモデルが考案されている。平滑推移モデルの詳細については、Franses, Teräsvirta, and van Dijk (2002) や Teräsvirta (2004) などを参照されたい。平滑推移モデルは推移関数によってパラメータの推移を表現する。具体例として、2状態平滑推移モデルにおけるパラメータを挙げる。 t 期におけるパラメータ $(x)_t$ は

$$(x)_t = (1 - G(t)) x_{1st} + G(t) x_{2nd},$$

と表される。 $G(\cdot)$ が推移関数であり、 t 期における x_{1st} と x_{2nd} のウェイトを表している。代表的な推移関数としては、ロジスティック型と指数型がある。本稿では、以下のロジスティック型推移関数を用いてパラメータを推移させる。

$$G(t, \mu, a) = \frac{1}{1 + \exp(-\mu(t/T - a))},$$

t が小さい時には G の値が 0 に近く、 t が T に近づくほど G の値が 1 に近づく。つまり、 $(x)_t$ は x_{1st} から徐々に x_{2nd} に値が推移することになる。 $\mu > 0$ は推移の速度を規定するパラメータ、 $a \in (0, 1)$ は推移の中心を規定するパラメータである。 μ が大きいほど関数の勾配が大きくなり、変化が急激になる。また、 aT のところで G の値が 0.5 になるという性質がある。

平滑推移モデルは 3 状態以上に容易に拡張できる。本稿の目的は、こうしたパラメータを含む平滑推移モデルを DSGE モデルに導入し、その有用性を検証することである。そのため、前節で導出した RBC モデルについて、通常モデル (1 状態) と 5 状態 (I~V 期) の平滑推移 RBC モデルを推定し、これらのモデルによる経済分析の結果を比較する。ここで、1 状態の通常 RBC モデルをモデル I、5 状態平滑推移 RBC モデルをモデル II とする。モデル I では、状態を複数に分けないため、推移関数でパラメータのウェイト付けを行うことはない。モデル II の場合、 t 期のパラメータベクトル Θ_t は

$$\begin{aligned} \Theta_t = & \Theta_{1st} + (\Theta_{2nd} - \Theta_{1st}) G_1(t, \mu_1, a_1) + (\Theta_{3rd} - \Theta_{2nd}) G_2(t, \mu_2, a_2) \\ & + (\Theta_{4th} - \Theta_{3rd}) G_3(t, \mu_3, a_3) + (\Theta_{5th} - \Theta_{4th}) G_4(t, \mu_4, a_4), \end{aligned}$$

と表される。5 状態の場合は、5 つのパラメータベクトル $(\Theta_{1st}, \Theta_{2nd}, \Theta_{3rd}, \Theta_{4th}, \Theta_{5th})$ を 4 つの推移関数 $(G_1(t, \mu_1, a_1), G_2(t, \mu_2, a_2), G_3(t, \mu_3, a_3), G_4(t, \mu_4, a_4))$ によってウェイト付けすることで推移を表現することになる。なお、パラメータの変化に確率的な要素はないものとする。例えば、本稿のモデルの構造パラメータである技術進歩率に関しては、通常 DSGE モデルの推定では z のみが推定の対象であるが、5 状態平滑推移モデルの推定では $z_{1st}, z_{2nd}, z_{3rd}, z_{4th}, z_{5th}$ の 5 つのパラメータを推定する必要がある。推定する全てのパラメータを含むベクトルを次のように表す。

$$\Theta = [\Theta_{1st}, \Theta_{2nd}, \Theta_{3rd}, \Theta_{4th}, \Theta_{5th}]'$$

2.6 トレンド除去・定常状態

上記のモデルには成長トレンドを持つ変数がある。マクロ変数の定常状態周りで景気変動分析を行うためには、この成長トレンドを除去する必要がある。そこで、トレンドを持つ変

数を技術水準 Z_t で割り込む（ラグランジュ乗数には掛け合わせる）ことによって、変数を再定義する。例えば、消費 C_t に関しては、 $c_t = C_t/Z_t$ と再定義し、ラグランジュ乗数 Λ_t に関しては、 $\lambda_t = \Lambda_t Z_t^\sigma$ と再定義する。ここで、通常の DSGE モデルでは、トレンド除去後の各変数の定常値は期間を通じて一定であるが、平滑推移モデルを導入する場合は一定ではなく徐々に推移していくことになる。この点が、通常のモデルとの大きな相違点である。ただし、トレンド除去後の生産量の定常値は基準化し、一定であると仮定する。すなわち、 $(y)_t = y, \forall t$ が成り立つ。全てのショックをゼロとした時の式 (1)~(18) の連立方程式の解を t 期の各内生変数の定常値と定義する。

各変数の定常値は次のように導出される。式の左辺は内生的に求められる値であり、右辺には既に設定された値か、カリブレーションによって設定されるパラメータか、推定されるパラメータを置いている。まず、式 (12) と三面等価の性質を用いると、所得税率の定常値 $(\tau^i)_t$ は

$$(\tau^i)_t = \left(\frac{r^i}{y} \right)_t,$$

と表される。ここで、 $(r^i/y)_t$ は所得税収対 GDP 比の定常値である。式 (13) から、消費税率の定常値 $(\tau^c)_t$ は

$$(\tau^c)_t = \frac{\left(\frac{r^c}{y} \right)_t}{\left(\frac{c}{y} \right)_t},$$

と表される。ここで、 $(r^c/y)_t$ は消費税収対 GDP 比の定常値、 $(c/y)_t$ は消費対 GDP 比の定常値である。式 (4) から、所得の限界効用（ラグランジュ乗数）の定常値 $(\lambda)_t$ は

$$(\lambda)_t = \frac{1}{1 + (\tau^c)_t} \left(\left(\frac{c}{y} \right)_t - \theta \left(\frac{c}{y} \right)_{t-1} \frac{1}{(z)_t} \right)^{-\sigma},$$

と表される。式 (7)、(8)、(9)、(15) から、労働生産性の定常値 $(\gamma)_t$ は

$$(\gamma)_t = \left\{ \left(1 - (\tau^i)_t \right) (1 - (\alpha)_t) (\lambda)_t \right\}^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (19)$$

と表される。式 (8)、(9)、(15) から、賃金の定常値 $(w)_t$ は

$$(w)_t = (1 - (\alpha)_t) (\gamma)_t,$$

と表される。式 (6) から、資本ストックレンタル料の定常値 $(r)_t$ は

$$(r)_t = \frac{(z)_t^\sigma - \beta(1 - \delta) \frac{(\lambda)_t}{(\lambda)_{t-1}}}{\beta(1 - (\tau^i)_t) \frac{(\lambda)_t}{(\lambda)_{t-1}}},$$

と表される。なお、式 (5) よりトービンの q の定常値は常に 1 ($(q)_t = 1, \forall t$) であることを用いている。式 (8)、(10) から、資本ストック対 GDP 比の定常値 $(k/y)_t$ は

$$\left(\frac{k}{y} \right)_{t-1} = \frac{(\alpha)_t (z)_t}{(r)_t},$$

と表される。式 (3) から、投資対 GDP 比の定常値 $(i/y)_t$ は

$$\left(\frac{i}{y}\right)_t = \left(\frac{k}{y}\right)_t - (1 - \delta) \left(\frac{k}{y}\right)_{t-1} \frac{1}{(z)_t},$$

と表される。式 (14) から、外生需要対 GDP 比の定常値 $(g/y)_t$ は次のように表される。

$$\left(\frac{g}{y}\right)_t = 1 - \left(\frac{c}{y}\right)_t - \left(\frac{i}{y}\right)_t,$$

2.7 対数線形近似・合理的期待均衡解

前述のように導出されトレンド除去されたモデルは非線形な連立方程式体系であるため、定常状態周りで対数線形近似する。内生変数をその期の定常値からの乖離率 $\tilde{x}_t = \ln x_t - \ln(x)_t$ として再定義する。ただし、所得税率 τ_t^i と消費税率 τ_t^c に関しては、それぞれ $\tilde{\tau}_t^i = \tau_t^i - (\tau^i)_t$ 、 $\tilde{\tau}_t^c = \tau_t^c - (\tau^c)_t$ と定義している。これらはネットの税率であるため、 t 期の定常値から何%ポイント乖離しているかを測っている。式 (1)~(18) を対数線形近似したものを補論に掲載している。対数線形近似後は、Sims (2002) の方法に従って以下のように行列表示する。

$$\Gamma_0(\Theta_t) \mathbf{s}_t = \Gamma_1(\Theta_t) \mathbf{s}_{t-1} + \Psi_0(\Theta_t) \boldsymbol{\epsilon}_t + \Pi_0 \eta_t.$$

ここで、 $\Gamma_0(\Theta_t)$ 、 $\Gamma_1(\Theta_t)$ 、 $\Psi_0(\Theta_t)$ 、 Π_0 は t 期のパラメータベクトル Θ_t の下での係数行列であり、 \mathbf{s}_t は内政変数のベクトル、 $\boldsymbol{\epsilon}_t$ は外生ショックのベクトルである。 η_t は $E_t \eta_{t+1} = 0, \forall t$ を満たす予測誤差ベクトルであり、経済主体の期待形成に関しては、合理的期待が仮定されている。モデルの解が一意に決まる場合、この式は以下のように解ける²。

$$\mathbf{s}_t = \Phi_1(\Theta_t) \mathbf{s}_{t-1} + \Phi_\epsilon(\Theta_t) \boldsymbol{\epsilon}_t. \quad (20)$$

式 (20) がいわゆる合理的期待均衡解であり、 $\Phi_1(\Theta_t)$ と $\Phi_\epsilon(\Theta_t)$ はモデルの構造および構造パラメータによって規定される行列である。式 (20) を用いて様々な分析が可能であるが、ここで Φ_1 および Φ_ϵ は一定ではない。通常の DSGE モデルでは、その後の分析の際にこれらの行列は常に一定であるが、本稿のような時変パラメータを含む場合は行列の要素の値が平滑に推移していくことに注意されたい。

3 バイズ推定

本節では、上述の RBC モデルのパラメータの最尤推定を行う。DSGE モデルのような高度な理論統一性を備えたモデルの推定には、パラメータが取りうる範囲に関する理論的制約やミクロ計量分析などの先行研究の結果を考慮するためにバイズ推定法によるパラメータ推定が一般的に行われている。本稿のモデル推定においてもバイズ推定法を用いる。DSGE モデルは理論的な意味付けのないモデルよりも多くの制約を受けているため、解析的に尤度関数を導くことが困難である。さらに、バイズ推定を行う場合、推定に用いる事後分布の確率密度関数はさらに複雑になる。こうしたことから、MCMC 法というサンプリング手法による推定を行う。バイズ推定法および MCMC 法についての詳細は、An and Schorfheide (2007) や Negro and Schorfheide (2011) などを参照されたい。

²本稿では、Sims (2002) の方法に倣い合理的期待均衡解の導出を行った。導出過程および解の一意性については、Blanchard and Kahn (1980) や Sims (2002) を参照されたい。

3.1 データ

1966年から2017年までの年次（暦年）の実質GDP、実質消費、実質設備投資、実質労働生産性、実質所得税収、実質消費税収の6系列（全て成長率）を推定に使用した。GDP、消費、設備投資に関するデータは、内閣府「国民経済計算」からそれぞれの実質値の系列を取得した。労働生産性に関するデータは、Groningen Growth and Development Centre³が公表している日本における“Average annual hours worked by persons engaged”と“Number of persons engaged”⁴の積で実質GDPを割り込むことによって作成した。所得税収、消費税収に関するデータは、OECD（2020）が推計した日本における“Tax on personal income (% of GDP)”、“Tax on goods and services (% of GDP)”を取得し、それぞれを実質GDPに掛け合わせるによって作成した。図1は推定に使用する成長率データを図示したものである。

3.2 カリブレーション・事前分布

本稿では、一部のパラメータについて推定を行わず、カリブレーションによって値を設定する。表1はモデルIとモデルIIにおいてカリブレートしたパラメータとその値をまとめたものである。家計の主観的割引率 β と資本減耗率 δ に関しては、Jesper（2004）の値を参考にした。Jesper（2004）では四半期データを基に、 $\beta = 0.99$ 、 $\delta = 0.025$ と設定しているが、本稿では推定に年次データを使用するため、それを考慮して、 $\beta = 0.95$ 、 $\delta = 0.10$ と設定した。モデルIに関しては、Karabarbounis and Neiman（2013）による推計において期間を通じた日本の労働分配率が平均して概ね60%であることから、資本分配率を $\alpha = 0.40$ と設定した。消費対GDP比、所得税収対GDP比、消費税収対GDP比については、推定に使用したデータからそれぞれの平均値を算出し、 $c/y = 0.585$ 、 $r^i/y = 0.055$ 、 $r^c/y = 0.045$ と設定した。モデルIIに関しては、推移関数に関するパラメータである μ や a を推定することも可能であるが、パラメータの識別問題⁵を回避するためにこれらの値をあらかじめ設定した。ロジスティック型関数の勾配を規定する μ は、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 10$ とした。また、ロジスティック型関数の変曲点を規定する a に関しては、 $a_1 = 1/5$ 、 $a_2 = 2/5$ 、 $a_3 = 3/5$ 、 $a_4 = 4/5$ とした。資本分配率については、Karabarbounis and Neiman（2013）による推計を参考に、推定期間において0.38から0.42へ滑らかに推移するように値を設定した。消費対GDP比、所得税収対GDP比、消費税収対GDP比に関しては、推定に使用したデータを5つの期間に分け、それぞれの期間の平均値を算出し、表1のように設定した。

ベイズ推定法によってモデルIとモデルIIのそれぞれについてパラメータベクトル θ を推定する。ベイズ推定法では、パラメータを確率変数とみなして事前分布を設定することで、経済理論と整合的な数値の推定が可能であるため、DSGEモデルの推定に一般的に用いられている。各パラメータの事前分布における確率密度と尤度の積を基にパラメータを推定する。モデルIとモデルIIにおいて推定するパラメータの事前分布は表2にまとめられている。技術進歩率 z に関しては、推定に使用したデータからグロスの実質GDP成長率の平均値と標準偏差を算出し、それらを事前分布の平均と標準偏差として設定した。モデルIでは全期間での平均と標準偏差を使用し、モデルIIでは、推定に使用したデータを5つの期間

³University of Groningen, Faculty of Economics and Business

⁴推計方法についてはFeenstra, Inklaar, and Timmer（2015）を参照されたい。なお、データファイルはFRED Economic Dataから取得した。

⁵ここでの識別問題とは、ある推移を生成するパラメータの組み合わせが複数存在することをいう。

に分け、それぞれの期間の平均と標準偏差を使用した。このように設定した事前分布の下での各パラメータ $i \in \Theta$ の確率密度を p_i^{prior} とすると、それらの積はベイズ推定の際に使用される。

$$p(\Theta) = \prod_{i \in \Theta} p_i^{prior}.$$

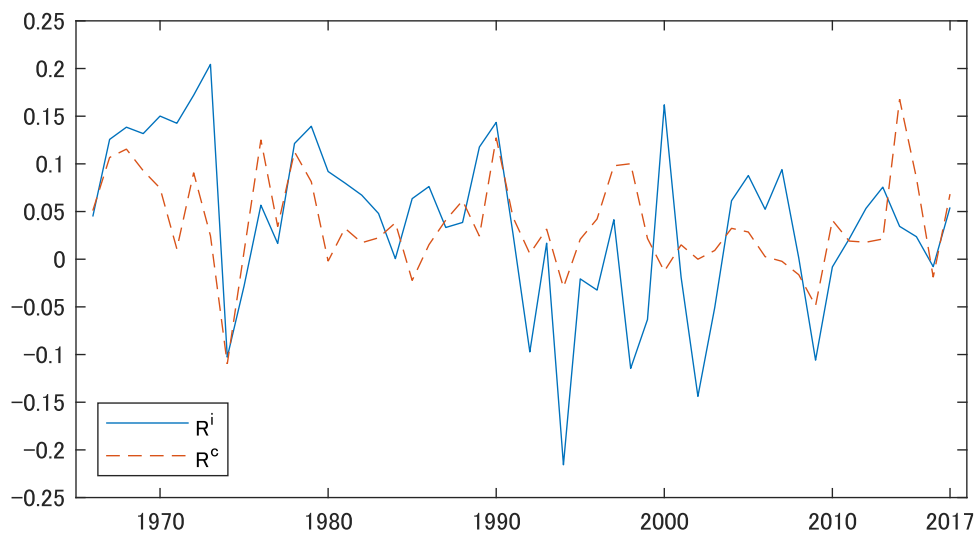
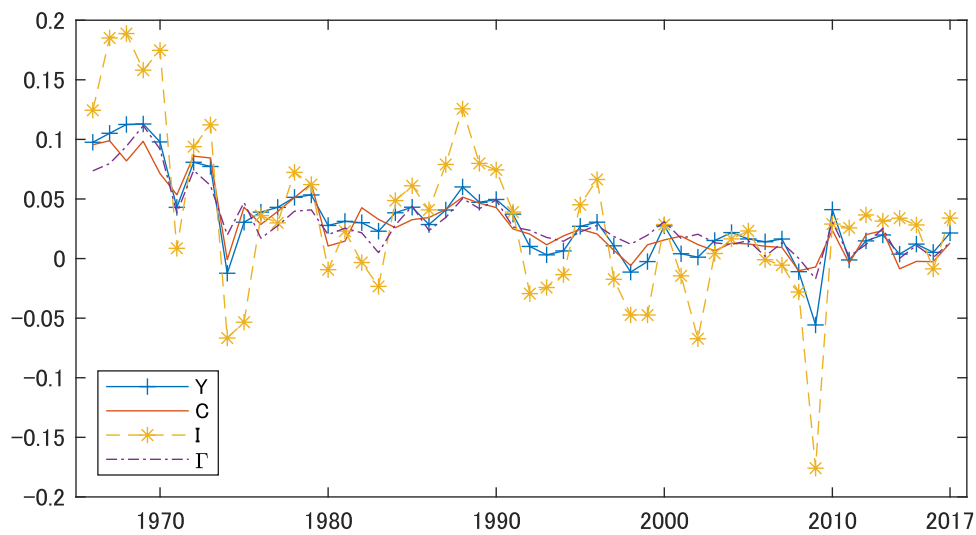


図 1: 使用データ

(注) 横軸に推定期間、縦軸に成長率をとり、推定に使用したデータ (GDP (Y))、消費 (C)、設備投資 (I)、労働生産性 (Γ)、所得税収 (R^i)、消費税収 (R^c) を図示している。

表 1: カリブレーション

共通		値	ソース
β	家計の主観的割引率	0.95	Jesper (2004)
δ	資本減耗率	0.10	Jesper (2004)
モデル I		値	ソース
α	資本分配率	0.40	Karabarbounis and Neiman (2013)
c/y	消費対 GDP 比	0.585	データ
r^i/y	所得税収対 GDP 比	0.055	データ
r^c/y	消費税収対 GDP 比	0.045	データ
モデル II		値	ソース
α_{1st}	I 期の資本分配率	0.38	Karabarbounis and Neiman (2013)
α_{2nd}	II 期の資本分配率	0.39	Karabarbounis and Neiman (2013)
α_{3rd}	III 期の資本分配率	0.40	Karabarbounis and Neiman (2013)
α_{4th}	IV 期の資本分配率	0.41	Karabarbounis and Neiman (2013)
α_{5th}	V 期の資本分配率	0.42	Karabarbounis and Neiman (2013)
$(c/y)_{1st}$	I 期の消費対 GDP 比	0.601	データ
$(c/y)_{2nd}$	II 期の消費対 GDP 比	0.596	データ
$(c/y)_{3rd}$	III 期の消費対 GDP 比	0.581	データ
$(c/y)_{4th}$	IV 期の消費対 GDP 比	0.574	データ
$(c/y)_{5th}$	V 期の消費対 GDP 比	0.577	データ
$(r^i/y)_{1st}$	I 期の所得税収対 GDP 比	0.044	データ
$(r^i/y)_{2nd}$	II 期の所得税収対 GDP 比	0.059	データ
$(r^i/y)_{3rd}$	III 期の所得税収対 GDP 比	0.069	データ
$(r^i/y)_{4th}$	IV 期の所得税収対 GDP 比	0.050	データ
$(r^i/y)_{5th}$	V 期の所得税収対 GDP 比	0.054	データ
$(r^c/y)_{1st}$	I 期の消費税収対 GDP 比	0.041	データ
$(r^c/y)_{2nd}$	II 期の消費税収対 GDP 比	0.039	データ
$(r^c/y)_{3rd}$	III 期の消費税収対 GDP 比	0.038	データ
$(r^c/y)_{4th}$	IV 期の消費税収対 GDP 比	0.049	データ
$(r^c/y)_{5th}$	V 期の消費税収対 GDP 比	0.054	データ

(注) モデル I とモデル II においてカリブレートしたパラメータとその値がまとめられている。

表 2: 事前分布

共通		分布	平均	標準偏差
σ	異時点間代替の弾力性の逆数	gamma	1.000	0.375
χ	労働供給の弾力性の逆数	gamma	2.000	0.750
θ	消費の習慣形成の程度	beta	0.100	0.050
ρ_z	PT ショックの持続性	beta	0.500	0.200
ρ_a	TT ショックの持続性	beta	0.500	0.200
ρ_i	投資の限界効率ショックの持続性	beta	0.500	0.200
ρ_g	外生需要ショックの持続性	beta	0.500	0.200
ρ_{τ^i}	所得税率ショックの持続性	beta	0.500	0.200
ρ_{τ^c}	消費税率ショックの持続性	beta	0.500	0.200
σ_z	PT ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
σ_a	TT ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
σ_i	投資の限界効率ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
σ_g	外生需要ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
σ_{τ^i}	所得税率ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
σ_{τ^c}	消費税率ショックの標準偏差	inverse gamma	0.050	Inf
モデル I		分布	平均	標準偏差
z	技術進歩率	normal	1.031	0.037
ζ	投資の調整コスト	gamma	4.000	1.500
モデル II		分布	平均	標準偏差
z_{1st}	I 期の技術進歩率	normal	1.078	0.042
z_{2nd}	II 期の技術進歩率	normal	1.039	0.010
z_{3rd}	III 期の技術進歩率	normal	1.025	0.033
z_{4th}	IV 期の技術進歩率	normal	1.011	0.013
z_{5th}	V 期の技術進歩率	normal	1.007	0.022
ζ_{1st}	I 期の投資の調整費用	gamma	4.000	1.500
ζ_{2nd}	II 期の投資の調整費用	gamma	4.000	1.500
ζ_{3rd}	III 期の投資の調整費用	gamma	4.000	1.500
ζ_{4th}	IV 期の投資の調整費用	gamma	4.000	1.500
ζ_{5th}	V 期の投資の調整費用	gamma	4.000	1.500

(注) モデル I とモデル II において推定するパラメータの事前分布がまとめられている。

3.3 状態空間モデル

ここでは、前述のデータがモデル内の変数とどのように関連付けられるのかを示す。まず、実質 GDP 成長率 $\Delta \ln Y_t$ に対応する変数は \tilde{y}_t であり、次のように関連付けられる。

$$\begin{aligned}\Delta \ln Y_t &= (\ln Y_t - \ln Z_t) - (\ln Y_{t-1} - \ln Z_{t-1}) + (\ln Z_t - \ln Z_{t-1}) \\ &= \ln y_t - \ln y_{t-1} + \ln(z)_t + z_t^z \\ &= (\ln y_t - \ln y) - (\ln y_{t-1} - \ln y) + \ln(z)_t + z_t^z \\ &= \tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1} + \ln(z)_t + z_t^z.\end{aligned}\quad (21)$$

次に、実質消費成長率 $\Delta \ln C_t$ に対応する変数は \tilde{c}_t であり、次のように関連付けられる。

$$\begin{aligned}\Delta \ln C_t &= (\ln C_t - \ln Z_t) - (\ln C_{t-1} - \ln Z_{t-1}) + (\ln Z_t - \ln Z_{t-1}) \\ &= \ln c_t - \ln c_{t-1} + \ln(z)_t + z_t^z \\ &= (\ln c_t - \ln(c)_t) - (\ln c_{t-1} - \ln(c)_{t-1}) + (\ln(c)_t - \ln(c)_{t-1}) + \ln(z)_t + z_t^z \\ &= \tilde{c}_t - \tilde{c}_{t-1} + \Delta \ln(c/y)_t + \ln(z)_t + z_t^z.\end{aligned}\quad (22)$$

生産量以外の内生変数の定常値は時間を通じて変化するため、切片に $\Delta \ln(c/y)_t$ があることに注意されたい。他の実体経済変数 ($I_t, \Gamma_t, R_t^i, R_t^c$) についても以下のように関連付けられる。

$$\Delta \ln I_t = \tilde{i}_t - \tilde{i}_{t-1} + \Delta \ln(i/y)_t + \ln(z)_t + z_t^z, \quad (23)$$

$$\Delta \ln \Gamma_t = \tilde{\gamma}_t - \tilde{\gamma}_{t-1} + \Delta \ln(\gamma)_t + \ln(z)_t + z_t^z, \quad (24)$$

$$\Delta \ln R_t^i = \tilde{r}_t^i - \tilde{r}_{t-1}^i + \Delta \ln(r^i/y)_t + \ln(z)_t + z_t^z, \quad (25)$$

$$\Delta \ln R_t^c = \tilde{r}_t^c - \tilde{r}_{t-1}^c + \Delta \ln(r^c/y)_t + \ln(z)_t + z_t^z. \quad (26)$$

(21)~(26) 式は観測方程式と呼ばれ、

$$\mathbf{y}_t = \left[\Delta \ln Y_t, \Delta \ln C_t, \Delta \ln I_t, \Delta \ln \Gamma_t, \Delta \ln R_t^i, \Delta \ln R_t^c \right]',$$

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \left[\mathbf{s}_t, \tilde{y}_{t-1}, \tilde{c}_{t-1}, \tilde{i}_{t-1}, \tilde{\gamma}_{t-1}, \tilde{r}_{t-1}^i, \tilde{r}_{t-1}^c \right]',$$

と定義すると、次のように行列表現することができる。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta_t) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_t. \quad (27)$$

$\mathbf{A}(\Theta_t)$ は t 期のパラメータベクトル Θ_t に依存する定数項ベクトル、 \mathbf{B} はデータ変数と関連付けられるモデル変数を選択する行列を表している。また、合理的期待均衡解 (20) に、 $\tilde{y}_{t-1} = \tilde{y}_{t-1}$ 、 $\tilde{c}_{t-1} = \tilde{c}_{t-1}$ 、 $\tilde{i}_{t-1} = \tilde{i}_{t-1}$ 、 $\tilde{\gamma}_{t-1} = \tilde{\gamma}_{t-1}$ 、 $\tilde{r}_{t-1}^i = \tilde{r}_{t-1}^i$ 、 $\tilde{r}_{t-1}^c = \tilde{r}_{t-1}^c$ を加えた

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \hat{\Phi}_1(\Theta_t)\hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \hat{\Phi}_\epsilon(\Theta_t)\epsilon_t \quad (28)$$

は遷移方程式と呼ばれる。観測方程式 (27) と遷移方程式 (28) から構成される方程式体系が状態空間モデルであり、これによりモデルが示唆する諸変数の動きとデータから観察されるマクロ経済変動が関連付けられる。

3.4 尤度の評価

最尤推定法の基本的な考え方は次の通りである。まず、モデルが示唆する一期先予測値の確率密度関数と実際のデータの実現値から各期のデータの確率密度を求める。それらの積を尤度と定義し、尤度を最大にするパラメータの組み合わせが最尤推定値となる。モデルが線形で、ショックが正規分布に従うならば、モデルが示唆する一期先予測値の確率密度関数を解析的に求めることができるため、尤度の計算が容易になる。本稿のモデル I などの通常の DSGE モデルの場合も、この性質を利用して推定が行われている。本稿のモデル II のような時変パラメータを含むモデルの推定にも最尤推定法を適用することができる⁶。まず、モデル II のパラメータの変化はモデルの内生変数とは独立であり、確率的な要素はない。また、モデルは線形でショックは全て正規分布に従うと仮定されているため、尤度計算に必要なデータの一期先予測値の確率密度関数を解析的に求めることが可能である。

状態空間モデルとして表された RBC モデルの尤度を、カルマンフィルタ⁷によって評価する。まず、モデルの内生変数ベクトル \hat{s}_t とその分散共分散行列 \mathbf{P}_t の初期値をそれぞれ $\hat{s}_{1|0}$ 、 $\mathbf{P}_{1|0}$ に設定する。 $\hat{s}_{1|0}$ については、全ての要素を 0 とする。 $\mathbf{P}_{1|0}$ の設定については、Herbst (2015) などに倣い、第 1 期のパラメータベクトルの下での、以下の離散的リアプノフ方程式 (discrete Lyapunov equation) の近似的な解を初期値として置く。

$$\mathbf{P}_{1|0} = \hat{\Phi}_1(\Theta_1) \mathbf{P}_{1|0} \hat{\Phi}_1(\Theta_1)' + \hat{\Phi}_\epsilon(\Theta_1) \Sigma(\Theta_1) \hat{\Phi}_\epsilon(\Theta_1)'. \quad (29)$$

ここで、 $\Sigma(\Theta_1)$ は ϵ_1 の分散共分散行列である。式 (29) を用いて、 $\mathbf{P}_{1|0}$ について繰り返し計算することで近似的な解を求め⁸、初期値に設定する。初期値も確率変数として扱い、尤度を評価した方がより正確であるが、計算が複雑になる上に、データの標本数 T が大きければ初期値の影響は小さくなるため、本稿では初期値を所与とする。この初期値の下で観測方程式 (27) から得られる 1 期目の観測変数 \mathbf{y}_1 の予測誤差と条件付分散共分散行列は

$$\nu_{1|0} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}(\Theta_1) - \mathbf{B}\hat{s}_{1|0},$$

$$\mathbf{F}_{1|0} = \mathbf{B}\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{B}',$$

となる。 Θ_1 は推定するパラメータ全体のベクトルではなく、1 期目におけるパラメータの値のベクトルである。これらを用いると、 $\hat{s}_{1|0}$ と $\mathbf{P}_{1|0}$ は次のように更新される。

$$\hat{s}_{1|1} = \hat{s}_{1|0} + \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{B}'\mathbf{F}_{1|0}^{-1}\nu_{1|0},$$

$$\mathbf{P}_{1|1} = \mathbf{P}_{1|0} - \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{B}'\mathbf{F}_{1|0}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_{1|0}.$$

$\hat{s}_{1|1}$ と $\mathbf{P}_{1|1}$ はそれぞれ $\{\mathbf{y}_1\}$ を所与とした内生変数ベクトルの条件付き期待値とその分散共分散行列である。 $\hat{s}_{1|1}$ と $\mathbf{P}_{1|1}$ を基に、 $t = \{2, \dots, T\}$ のときには以下のような繰り返し計算が行われる。まず、 t 期のパラメータベクトル Θ_t の下での 1 期先予測を計算する。

$$\hat{s}_{t|t-1} = \hat{\Phi}_1(\Theta_t) \hat{s}_{t-1|t-1},$$

⁶Hamilton (1994) を参照されたい。

⁷カルマンフィルタの詳細については、Hamilton (1994) を参照されたい。

⁸初期値 $\mathbf{P}_{1|0}^{(0)}$ を適切なサイズの零行列とし、正方行列 $\mathbf{P}_{1|0}^{(s)} - \mathbf{P}_{1|0}^{(s-1)}$ の要素の最大絶対値が 10^{-3} 以下となるまで繰り返し計算を行った。

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \widehat{\Phi}_1(\Theta_t) \mathbf{P}_{t-1|t-1} \widehat{\Phi}_1'(\Theta_t) + \widehat{\Phi}_\epsilon(\Theta_t) \Sigma(\Theta_t) \widehat{\Phi}_\epsilon'(\Theta_t).$$

$\Sigma(\Theta_t)$ は ϵ_t の分散共分散行列である。本稿では、ショックの標準偏差の変化を考慮していないため、 Σ は期間 t には依存しないが、一般的には $\Sigma(\Theta_t)$ と書くことができる。観測方程式 (27) から得られる t 期目の観測変数 \mathbf{y}_t の予測誤差と条件付分散共分散行列は

$$\nu_{t|t-1} = \mathbf{y}_t - \mathbf{A}(\Theta_t) - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1},$$

$$\mathbf{F}_{t|t-1} = \mathbf{B}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{B}',$$

となる。これらを用いて、 $\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}$ と $\mathbf{P}_{t|t-1}$ は先ほどと同様に更新され、 $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}\}$ を所与とした内生変数ベクトルの条件付期待値とその分散共分散行列が計算される。

$$\hat{\mathbf{s}}_{t|t} = \hat{\mathbf{s}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{B}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\nu_{t|t-1},$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{B}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_{t|t-1}.$$

このとき、 ϵ_t が正規分布に従うとすると、 $\mathbf{Y}^{t-1} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}\}$ を所与とした \mathbf{y}_t は平均 $\mathbf{A}(\Theta_t) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}_{t|t-1}$ 、分散 $\mathbf{F}_{t|t-1}$ の多変量正規分布に従うため、 t 期の実現値 \mathbf{y}_t の確率密度は

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}^{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{n_d}{2}} |\mathbf{F}_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu_{t|t-1}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\nu_{t|t-1}\right)$$

によって計算される。 n_d はデータの数であり、本稿では $n_d = 6$ となる。この確率密度の積がデータ \mathbf{Y} を所与としたときの、パラメータベクトル Θ の下での尤度 $L(\Theta | \mathbf{Y})$ である。

$$L(\Theta | \mathbf{Y}) = \prod_{t=1}^T p(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}^{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{n_d T}{2}} \prod_{t=1}^T |\mathbf{F}_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \nu_{t|t-1}'\mathbf{F}_{t|t-1}^{-1}\nu_{t|t-1}\right).$$

ベイズの定理より、事後分布における確率密度 $p(\Theta | \mathbf{Y})$ は、次のように表される。

$$p(\Theta | \mathbf{Y}) \propto L(\Theta | \mathbf{Y})p(\Theta).$$

つまり、事後分布における確率密度は尤度と事前分布における確率密度の積に比例する。MCMC 法ではいくつかの $L(\Theta | \mathbf{Y})p(\Theta)$ を生成し、事後分布の形状の近似を行う。

3.5 推定アルゴリズム

DSGE モデルの推定にしばしば使用される Dynare と呼ばれるソフトウェアでは、本稿のモデルを推定することが困難である。そこで、MATLAB による推定コードを作成した。ベイズ推定法では、事後分布を基にパラメータの推定値を決定するが、その分布の確率密度関数を解析的に求めることは非常に困難である。その理由としては、合理的期待均衡解の導出の際に複雑な行列計算を伴い、尤度関数が極めて複雑になることや、パラメータ毎に事前分布が設定されることが挙げられる。そのため、MCMC 法というサンプリング手法によって事後分布を近似することが一般的である。本稿でも MCMC 法によるベイズ推定を行った。推定アルゴリズムは次のようにプログラムされている。

まず、事後分布の形状を近似するためのサンプリングを効率的に行うために、シミュレーションベースで事後分布における確率密度をなるべく高くするようなパラメータベクトルを探し出す。このプロセスの目的は、初期値周辺の疑似的な事後モードを得ることである。

1. 初期値 $\Theta^{(0)}$ を設定し、 $s = 1$ として、以下の繰り返し計算を実行する。
2. 正規分布 $N(\Theta^{(s-1)}, \Sigma^m)$ からパラメータベクトルの候補 ϑ をサンプリングする。
3. $L(\vartheta|\mathbf{Y})p(\vartheta) > L(\Theta^{(s-1)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s-1)})$ の場合は受容 ($\Theta^{(s)} = \vartheta$) し、そうでない場合は棄却 ($\Theta^{(s)} = \Theta^{(s-1)}$) する。
4. $s = s + 1$ として、2. に戻る。2. から 4. のプロセスを $s = n_m$ となるまで繰り返す。

このサンプリングをプロセス 1 とする。対角行列 Σ^m はサンプリングに用いる乱数の分散を表している。対角成分の値はそれぞれのパラメータについて個々に設定する。例えば、ある対角成分を 0.01 と設定すれば、乱数の約 95% は ± 0.196 の範囲に発生することになる。サンプリング回数 n_m に関しては、 $L(\Theta^{(s)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s)})$ の値が概ね収束するように設定する。

疑似的な事後モードから、メトロポリスヘイスティングス (MH) アルゴリズムという方法でパラメータベクトルをサンプリングしていくと、事後分布の形状を近似することができる。その際に用いる乱数が従う多変量正規分布の分散共分散行列 Σ^* は jumping covariance と呼ばれている。事後分布のモード周辺の形状や勾配を考慮した Σ^* を設定することで、効率的な推定が可能になる。本稿では、 Σ^* を以下のようにシミュレーションベースで設定する。

1. 初期値を $\Theta^{(0)} = \Theta^{n_m}$ 、 $s = 1$ として、以下の繰り返し計算を実行する。
2. 正規分布 $N(\Theta^{(s-1)}, \Sigma^b)$ からパラメータベクトルの候補 ϑ をサンプリングする。
3. $\Theta^{(s-1)}$ と ϑ を用いて $r = \frac{L(\vartheta|\mathbf{Y})p(\vartheta)}{L(\Theta^{(s-1)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s-1)})}$ を計算し、 ϑ を確率 $\min(r, 1)$ で受容し、確率 $1 - \min(r, 1)$ で棄却する。
4. $s = s + 1$ として、2. に戻る。2. から 4. のプロセスを $s = n_b$ となるまで繰り返す。
5. $L(\Theta^{(s)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s)})$ を最大にした $\Theta^{(s)}$ を Θ^{max} 、 n_b 個の $\Theta^{(s)}$ から計算したパラメータの分散共分散行列を Σ^* とする。

このサンプリングをプロセス 2 とする。ここで、 Σ^b は Σ^m と同様に対角行列であり、対角成分の値はそれぞれのパラメータについて個々に設定する。このプロセスでは、前のプロセスで最後に受容されたパラメータベクトル Θ^{n_m} の周辺でサンプリングを行う。生成された n_b 個のサンプルから計算したパラメータの分散共分散は、事後分布の勾配を表している。例えば、サンプリングされたパラメータの分散が小さいほど、そのパラメータの周辺分布の尖度が大きいことになる。このプロセスで計算された分散共分散行列は次のプロセスでのサンプリングで使用される。事後分布の勾配を考慮しているため、サンプリングが効率的になる。このプロセスは MH アルゴリズムにおけるバーンイン期間と考えることができる。バーンイン期間とは、事後分布の近似に用いるサンプルを生成する前にサンプリングの慣らし運転を行う期間であり、効率的なサンプリングを行うために設けられることが多い。すなわち、この期間では、受容されるパラメータベクトルの範囲を安定させることが求められる。

そのため、サンプリング回数 n_b については、 $L(\Theta^{(s)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s)})$ の推移が安定するような回数に設定する。最後に、以下のプロセス 3 によって事後分布を近似的に求める。

1. 初期値を $\Theta^{(0)} = \Theta^{max}$ 、 $s = 1$ として、以下の繰り返し計算を実行する。
2. 正規分布 $N(\Theta^{(s-1)}, c^2\Sigma^*)$ からパラメータベクトルの候補 ϑ をサンプリングする。
3. $\Theta^{(s-1)}$ と ϑ を用いて $r = \frac{L(\vartheta|\mathbf{Y})p(\vartheta)}{L(\Theta^{(s-1)}|\mathbf{Y})p(\Theta^{(s-1)})}$ を計算し、 ϑ を確率 $\min(r, 1)$ で受容し、確率 $1 - \min(r, 1)$ で棄却する。
4. $s = s + 1$ として、2. に戻る。2. から 4. のプロセスを $s = n_{mh}$ となるまで繰り返す。

$c > 0$ はサンプリング時の分散を調節するスケールパラメータである。受容確率が 25 % 程度になっていると、サンプリングが効率的であることが知られている。 c によってこの受容確率を調節することができる。プロセス 3 で生成された $\{\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(n_{mh})}\}$ の分布は、 $n_{mh} \rightarrow \infty$ とすると真の確率分布に収束することが知られているため、 $\{\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(n_{mh})}\}$ が事後分布からサンプリングされたものとみなして推定に用いる。

3.6 事後分布

推定する各パラメータの事前平均をプロセス 1 の初期値に設定し、サンプリング回数は $n_m = 3,000$ 、 $n_b = 20,000$ 、 $n_{mh} = 80,000$ とした。また、プロセス 3 での受容確率が 20 ~ 30 % になるようにスケールパラメータ c を調節した。プロセス 3 で生成された n_{mh} 個のサンプルから算出した平均値を事後平均として設定した。モデル I とモデル II における事後平均は表 3 にまとめられている。図 2 の上 2 行はカリブレートおよび推定された（事後平均）パラメータの推移を示している。技術進歩率 z については、モデル I では $z = 1.0234$ と推定されており、ショックがなければ実質 GDP 成長率などはもとの水準 ($\ln(z) \simeq 0.0234$) に収束していくことになる。しかし、1960 年代から現在に至るまで我が国の技術水準の成長率が一定であったと考えるのは現実的ではない。言い換えれば、実質 GDP 成長率などの技術進歩率からの乖離は、PT ショックをはじめとする構造ショックに依るものだけではなく、外生的な構造変化による影響を受けていると考えるのが自然である。モデル II では、技術進歩率の一貫した低下が示唆されており、こうした構造変化の影響が取り除かれている。また、実質 GDP 成長率はその期の技術進歩率 $\ln(z)_t$ から長期的に乖離することがないため、モデル II における ρ_z はモデル I の場合よりも小さく推定されている。投資の調整費用に関するパラメータ ζ については、その値が大きいほど家計が機動的に投資量を変更できず、投資の変動が抑えられるという性質がある。よって、投資量のトレンドを考慮したモデル II における推定値の方が大きくなると考えられる。推定された推移は概ねこの直観と整合的だが、2000 年代からはモデル II における推定値の方が小さくなっている。モデルに則して考えれば、2000 年以降に投資の調整費用の低下があったと解釈できる。例としては、工場建設や解体の効率化などが挙げられる。技術的には、リーマンショック時の実質設備投資成長率の乱高下の影響で、 ζ が小さく推定された可能性がある。実際には投資の調整費用の低下がリーマンショックを引き起こしたわけではなく、本稿のモデルではこの点を識別できない。しかし、2000 年以前の方が実質設備投資成長率の増減は激しく、2010 年代には落ち着いた推移

が観測されているため、この識別問題の影響は極めて限定的であると言える。図2の下3行は内生変数の定常値の推移を示している。モデルIIでは、税制度の変遷や構造的な政府支出の増大などの影響が考慮されていることが分かる。

表 3: 事後平均

パラメータ		モデル I	モデル II
σ	異時点間代替の弾力性の逆数	0.4592	0.7078
χ	労働供給の弾力性の逆数	2.1597	2.5923
θ	消費の習慣形成の程度	0.0793	0.0580
ρ_z	PT ショックの持続性	0.7291	0.2744
ρ_a	TT ショックの持続性	0.9415	0.9120
ρ_i	投資の限界効率ショックの持続性	0.6392	0.5165
ρ_g	外生需要ショックの持続性	0.9582	0.8942
ρ_{τ^i}	所得税率ショックの持続性	0.9040	0.8683
ρ_{τ^c}	消費税率ショックの持続性	0.9331	0.8644
σ_z	PT ショックの標準偏差	0.0229	0.0205
σ_a	TT ショックの標準偏差	0.0220	0.0210
σ_i	投資の限界効率ショックの標準偏差	0.1561	0.1825
σ_g	外生需要ショックの標準偏差	0.0629	0.0654
σ_{τ^i}	所得税率ショックの標準偏差	0.0043	0.0041
σ_{τ^c}	消費税率ショックの標準偏差	0.0042	0.0041
z	技術進歩率	1.0234	-
ζ	投資の調整費用	5.0051	-
z_{1st}	I 期の技術進歩率	-	1.0643
z_{2nd}	II 期の技術進歩率	-	1.0191
z_{3rd}	III 期の技術進歩率	-	1.0534
z_{4th}	IV 期の技術進歩率	-	1.0081
z_{5th}	V 期の技術進歩率	-	1.0027
ζ_{1st}	I 期の投資の調整費用	-	5.4425
ζ_{2nd}	II 期の投資の調整費用	-	5.0728
ζ_{3rd}	III 期の投資の調整費用	-	5.9976
ζ_{4th}	IV 期の投資の調整費用	-	4.5568
ζ_{5th}	V 期の投資の調整費用	-	3.9809

(注) モデル I とモデル II において推定されたパラメータの事後平均がまとめられている。サンプリング回数は $n_m = 3,000$ 、 $n_b = 20,000$ 、 $n_{mh} = 80,000$ とし、プロセス 3 での受容確率が 20~30 % になるようにスケールパラメータ c を調節した。

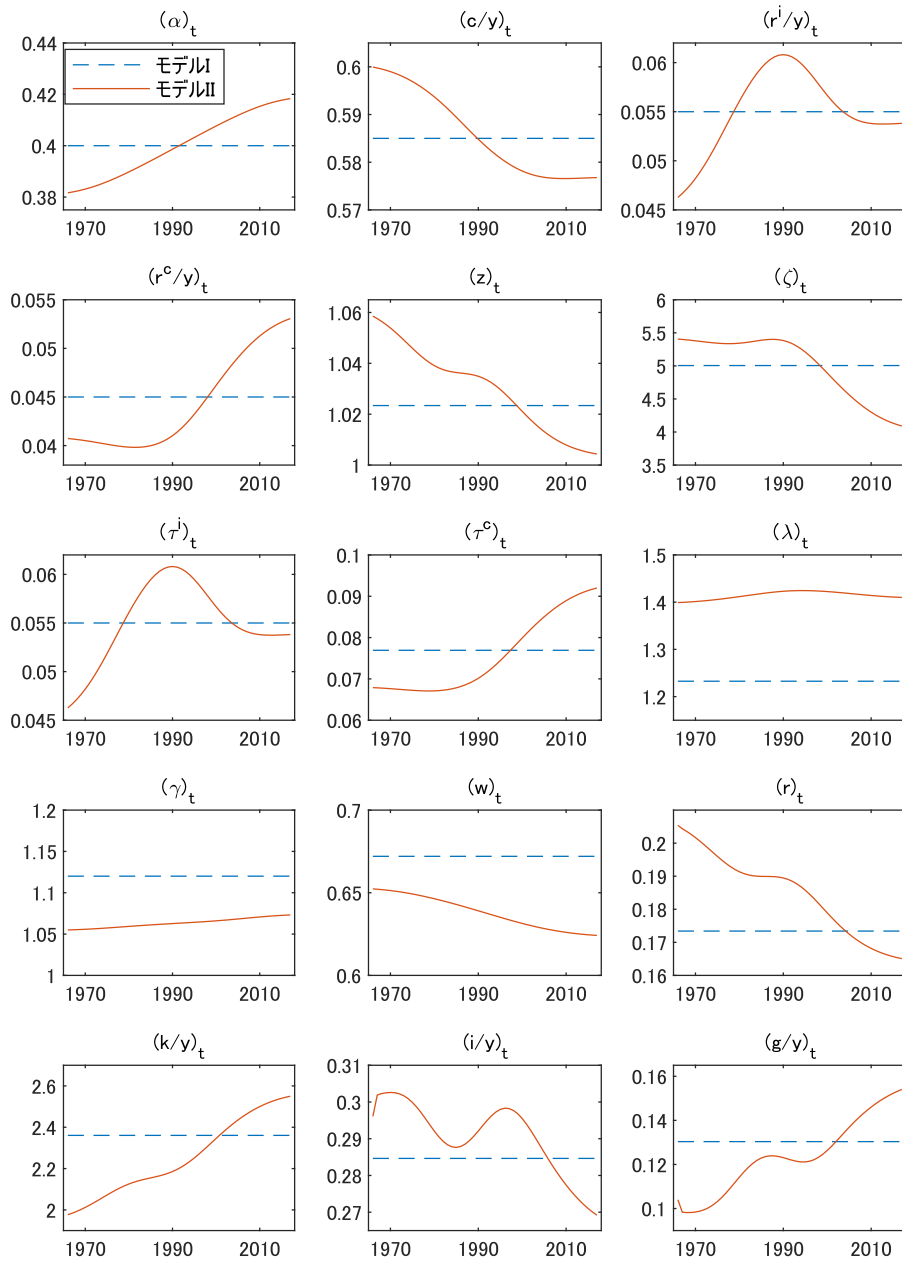


図 2: パラメータおよび定常値の推移

(注) 横軸に推定期間、縦軸に値をとり、モデル I (点線) とモデル II (実線) においてカリブレートおよび推定された (事後平均) パラメータと内生変数の定常値の推移を示している。

3.7 周辺尤度

Geweke (1999) の提案に基づいた周辺尤度の推計値を算出することにより、2つのモデルを評価した。Geweke (1999) の方法によって推計される周辺尤度は修正調和平均値と呼ばれており、ベイズ推定されたモデルの評価を行う指標の1つである。この値が大きい程、優れたモデルであるとされている。プロセス3で生成された n_{mh} 個のサンプル $\Theta^{(s)}$ を使用して以下のように修正調和平均値 $\hat{p}(\mathbf{Y}|M)$ を算出した。

$$\hat{p}(\mathbf{Y}|M) = \left[\frac{1}{n_{mh}} \sum_{s=1}^{n_{mh}} \frac{(2\pi)^{-\frac{n_{est}}{2}} |\Sigma_{mh}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\Theta^{(s)} - \Theta_{mh})' \Sigma_{mh}^{-1} (\Theta^{(s)} - \Theta_{mh})\right)}{L(\Theta^{(s)}|\mathbf{Y}, M) p(\Theta^{(s)}|M)} \right]^{-1}$$

ここで、 n_{est} は推定したパラメータの数である。(モデルIでは $n_{est} = 17$ 、モデルIIでは $n_{est} = 25$) また、 Θ_{mh} と Σ_{mh} はそれぞれプロセス3で生成された n_{mh} 個のパラメータベクトルの平均値と分散共分散行列であり、次のように定義される。

$$\Theta_{mh} = \frac{1}{n_{mh}} \sum_{s=1}^{n_{mh}} \Theta^{(s)}$$

$$\Sigma_{mh} = \frac{1}{n_{mh}} \sum_{s=1}^{n_{mh}} (\Theta^{(s)} - \Theta_{mh}) (\Theta^{(s)} - \Theta_{mh})'$$

表4は、モデルIとモデルIIにおける対数周辺尤度をまとめたものである。なお、多くの先行研究では対数周辺尤度はマイナスの値が算出されている。これは、推定に%単位の増加率データを使用しているためである。本稿の推定で使用した増加率データのスケールは%単位の1/100であるため、対数周辺尤度はプラスの値が算出されている⁹。2つのモデルを公平に評価するために事前オッズ比を1として、モデルI (M_1) とモデルII (M_2) の事後オッズ比 ($\hat{p}(\mathbf{Y}|M_1) / \hat{p}(\mathbf{Y}|M_2)$) を算出すると、 $\exp(594.3576) / \exp(594.4879) = 0.8778 < 1$ となり、モデルIIがより優れたモデルであることが分かる。

表4: 対数周辺尤度

モデルI	モデルII	事後オッズ比
594.3576	594.4879	0.8778

(注) 事後オッズ比は、事前オッズ比を1として算出した。すなわち、 $\hat{p}(\mathbf{Y}|M_1) / \hat{p}(\mathbf{Y}|M_2)$ の値である。

3.8 ヒストリカル分解

パラメータの値を事後平均に設定し、ヒストリカル分解を行う。本稿のモデルでは6つのショックを想定しており、ヒストリカル分解によって過去の経済変数がどのショックにどれ

⁹例えば、1変量正規分布の場合には標準偏差が $1/\sqrt{2\pi}$ 以下のときに確率密度の最大値は1以上になる。すなわち、推定に使用するデータの単位によっては対数尤度は正になる。

だけ影響を受けていたかを明らかにすることができる。まず、カルマン smoother¹⁰によってデータの観測期間中に他の変数がどのように推移していたかを明らかにする。事後平均の値を使用して、尤度を評価するときと同様にカルマンフィルタによって、 $\hat{s}_{t|t}$ 、 $\mathbf{P}_{t|t}$ 、 $\mathbf{P}_{t|t-1}$ を $t = 1, 2, \dots, T$ について求める。これらを所与とすると、 $t = T-1, T-2, \dots, 1$ の順番に後ろ向きに以下の方程式を解くことによって、 T 期までのデータを所与とした場合のモデルの内生変数の推移 $\hat{s}_{t|T}$ を求めることができる。

$$\hat{s}_{t|T} = \hat{s}_{t|t} + \left(\mathbf{P}_{t|t} \hat{\Phi}'_1(\Theta_{t+1}) \mathbf{P}_{t+1|t}^{-1} \right) \left(\hat{s}_{t+1|T} - \hat{\Phi}_1(\Theta_{t+1}) \hat{s}_{t|t} \right).$$

$\mathbf{P}_{t+1|t}$ の逆行列が存在しない場合は疑似逆行列によって代替する。 $\hat{s}_{t|T}$ を観測方程式 (27) と遷移方程式 (28) に代入し、 ϵ_t について解くと、モデルが示唆するショックの推移を得る。

$$\epsilon_t = \left(\mathbf{B} \hat{\Phi}_\epsilon(\Theta_t) \right)^{-1} \left(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}(\Theta_t) - \mathbf{B} \hat{\Phi}_1(\Theta_t) \hat{s}_{t-1|T} \right).$$

ただし、推定に使用するデータの数とモデル内のショックの数を一致させる必要がある。内生変数の変動の要因をそれぞれのショックに分解するのがヒストリカル分解である。

図3は、モデルIとモデルIIが示唆する実質GDP成長率のヒストリカル分解を図示したものである。実線の推移は実際の実質GDP成長率のデータの推移、破線は技術進歩率（式(21)の右辺第3項）の推移を表している。ショックがなければ実質GDP成長率は技術進歩率に収束することになる。積み上げ棒グラフは、実質GDP成長率の技術進歩率からの乖離がどのショックに依るものかを定量的に表している。モデルI（図3上を参照）の場合、技術進歩率は期間を通じて一定であると仮定しているため、技術進歩率の推移は $\ln(1.0234)$ の位置の水平線で表されている。図から分かるように、日本の実質GDP成長率は1960年代後半から1990年代はじめまでは概ね技術進歩率を上回っているが、それ以降は下回る年が多くなっている。前述の通り、データの観測期間において技術水準の伸び率が一定と仮定するのは現実的ではない。つまり、モデルIでは構造的な日本経済の推進力の衰退を捉えきれない可能性があり、景気循環分析に歪みが生じていると考えられる。

一方、モデルII（図3下を参照）の場合、構造的な技術進歩率の低下が示唆されており、実際の実質GDP成長率はその周辺で推移している。つまり、長期的な実質GDP成長率のトレンドを考慮しながら、短期的な景気循環の要因分解がなされている。なお、この成長と循環の分離は恣意的に行われたものではない。本稿のパラメータを導入することによって、モデルの構造とデータから非線形成長トレンドと景気循環の区別がなされている。モデルIからは次のことが分かる。まず、PTショックによる実質GDP成長率の変動の割合は、モデルIが示唆するほど小さくなく、短期的な変動の主要な要因はTTショックであることが示唆されている。なお、モデルIIにおける結果は、Kydland and Prescott (1982) をはじめとするRBC理論による実物的な要因に関する多くの既存研究と概ね整合的である。これは、モデルIIによって示唆された成長トレンドの妥当性を示すものである。

次に、モデルIIでは各年代ごとの経済変動の分析が可能である。1960年代後半には技術進歩率のトレンドを考慮したとしても経済が好調であったことが示唆されている。全体的にPTショックによる影響は取り除かれているが、68~70年にはPTショックによる押し上げ効果がみられ、技術水準の向上を伴った実質GDP成長率の上昇があったことが分かる。1980年代後半はいわゆるバブル景気の影響を受け高い実質GDP成長率が観測されている。モデルIからは、この間にPTショックによる押し上げがあったことが示唆される。言い換えれば、この時期は経済の実力を伴った好況であったということになり、これはバブル景気に対

¹⁰カルマン smootherの詳細については、Hamilton (1994) を参照されたい。

する一般的な評価と矛盾する。それに対して、モデルⅡではこの時期にはPTショックは一貫して押し下げ要因になっている。つまり、モデルⅡによるヒストリカル分解によって、より正確な景気循環の要因分解がなされていると言える。また、モデルⅠでは1990年代の実質GDP成長率は概ね技術進歩率周りで推移しており、PTショックは常に押し上げ要因になっている。一方で、モデルⅡではこの時期の成長率は技術進歩率をほとんど上回ることはなく、PTショックによる目立った押し上げ効果も観測されていない。この点においても、モデルⅡによる分析はバブル崩壊後の日本経済の長期的な低迷とより整合的であり、モデルⅠによる分析ではこの時期の景気後退を楽観的に捉えてしまう。

図4と図5は、それぞれモデルⅠとモデルⅡが示唆する実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質労働生産性成長率のヒストリカル分解を図示したものである。実質GDP成長率の場合と同様に、モデルⅡではPTショックによる影響が取り除かれている。また、消費の変動の主な要因はTTショック、投資の限界効率ショック、外生需要ショックであり、投資の変動は投資の限界効率ショックに大きく依存していることが分かる。労働生産性に関しては、構造変化の影響を取り除いたとしても、なおPTショックによる変動が大きい。

4 結びにかえて

状態変化を伴う時系列モデルである平滑推移モデルをDSGEモデルに導入し、日本経済の非線形成長トレンドと景気循環の分離を試みた。技術進歩率や資本分配率などのパラメータの推移を考慮し、それらの変化に伴った内生変数の定常値の推移を導くことによって定常状態回りで対数線形近似を行った。また、内生変数とは独立なパラメータの変化を仮定し、従来の解法や推定法を適用した。MCMC法によって平滑推移パラメータを含むDSGEモデルをベイズ推定したところ、従来のDSGEモデルの場合より周辺尤度が改善され、日本のマクロ経済データとの当てはまりの向上を確認した。推定値の下でヒストリカル分解を行ったところ、日本の経済構造の変化を考慮した景気循環の要因分解が可能になり、各経済変数の短期的な変動要因が明らかになった。

価格や賃金の硬直性・粘着性を考慮したニューケインジアンモデルに、本稿のような時変パラメータを応用させることも考えられる。本稿では、モデルによって短期的な変動における定性的および定量的なPTショックの影響に大きな差がみられた。ニューケインジアンモデルの推定においても、こうした結果が得られれば最適金融政策などの議論に影響を及ぼす可能性がある。その他にも、税制度や金融システムの変遷なども興味深いテーマである。時変パラメータを含むDSGEモデルによって、こうした分析を行うことは今後の課題としたい。

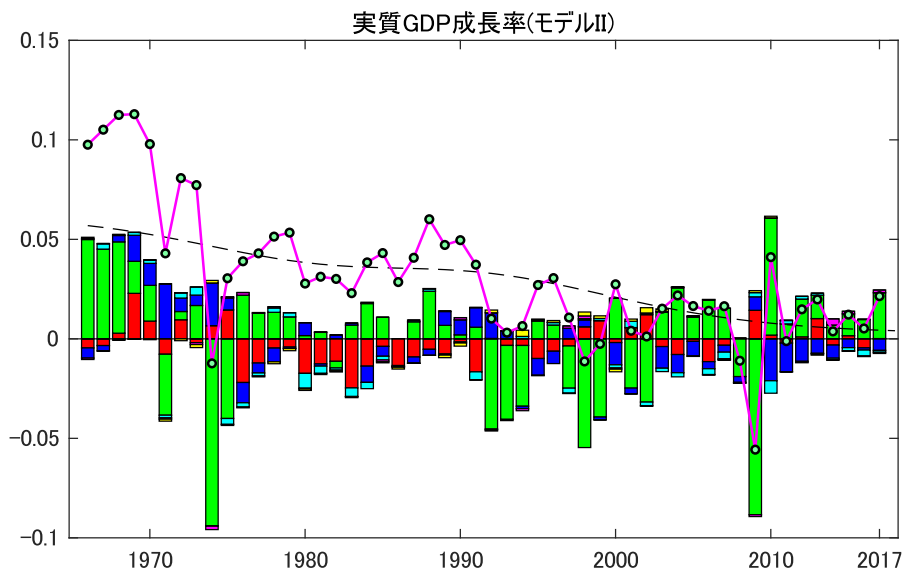
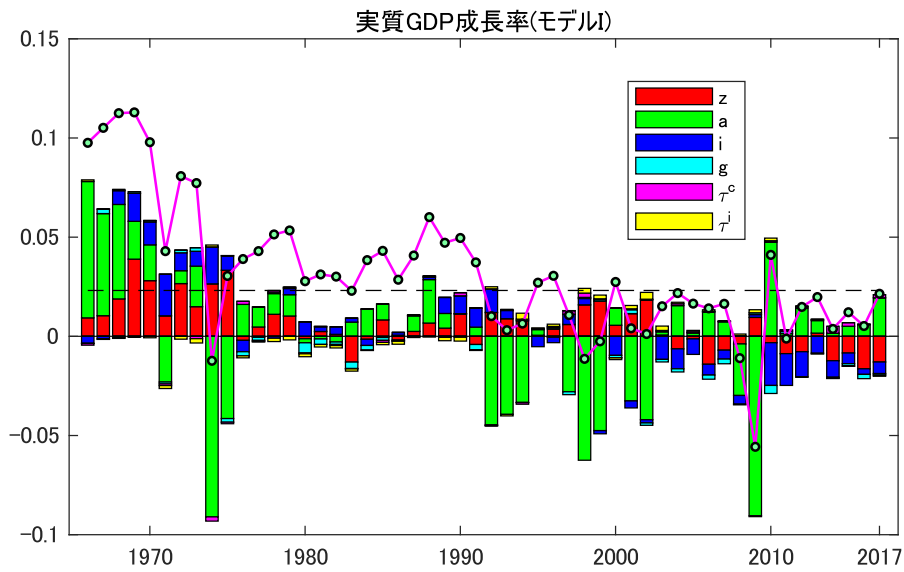


図 3: $\Delta \ln Y_t$ のヒストリカル分解

(注) モデル I とモデル II が示唆する実質 GDP 成長率のヒストリカル分解が図示されている。実線の推移は実際の実質 GDP 成長率のデータの推移、破線は技術進歩率（式 (21) の右辺第 3 項）の推移を表している。積み上げ棒グラフは、実線の点線からの乖離がどのショックに依るものかを定量的に表している。

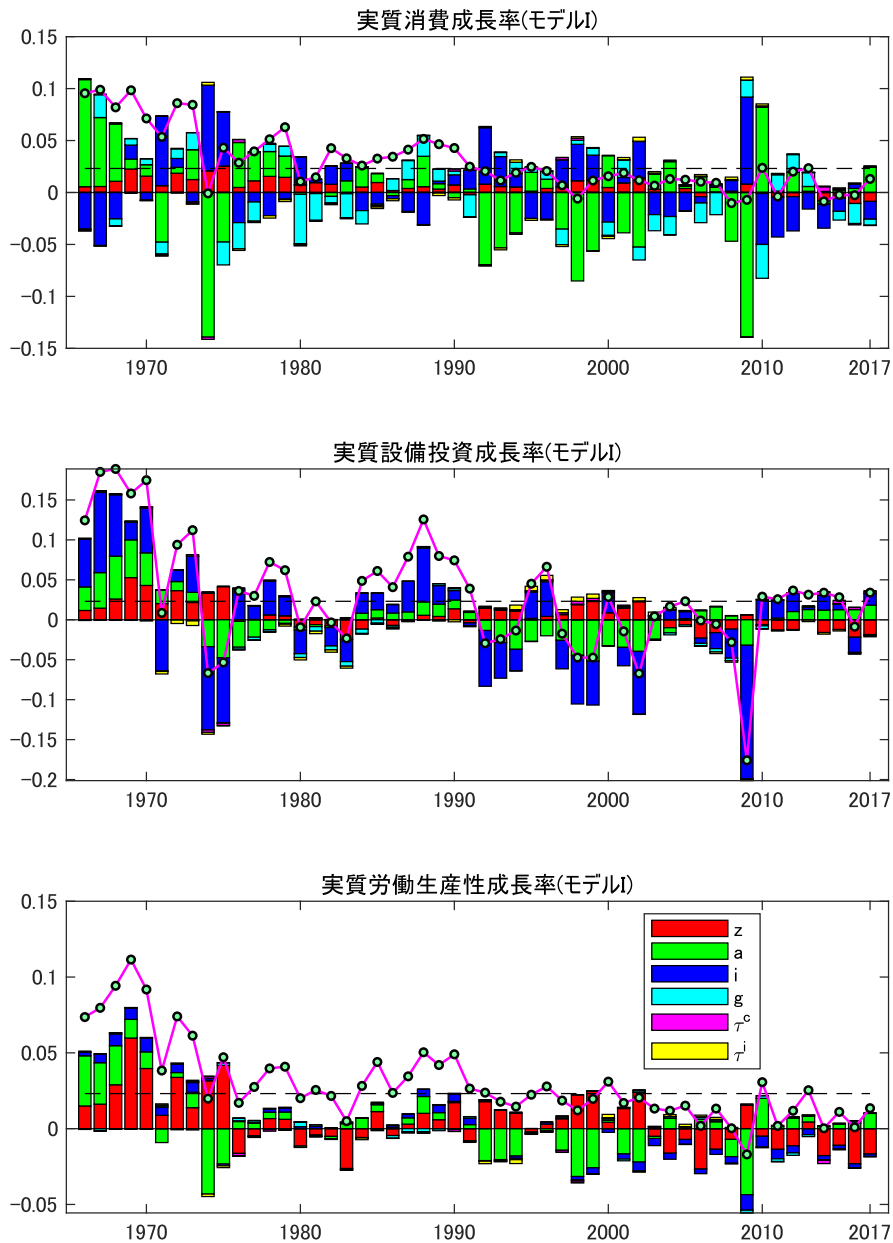


図 4: $\Delta \ln C_t$, $\Delta \ln I_t$, $\Delta \ln \Gamma_t$ のヒストリカル分解 (モデル I)

(注) モデル I が示唆する実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質労働生産性成長率のヒストリカル分解が図示されている。実線の推移は実際の実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質労働生産性成長率のデータの推移、破線は式 (22) ~ (24) の右辺第 3 項と右辺第 4 項の合計の推移を表している。積み上げ棒グラフは、実線の点線からの乖離がどのショックに依るものかを定量的に表している。なお、モデル I の場合はパラメータの推移を考慮していないため、破線は技術進歩率を表している。

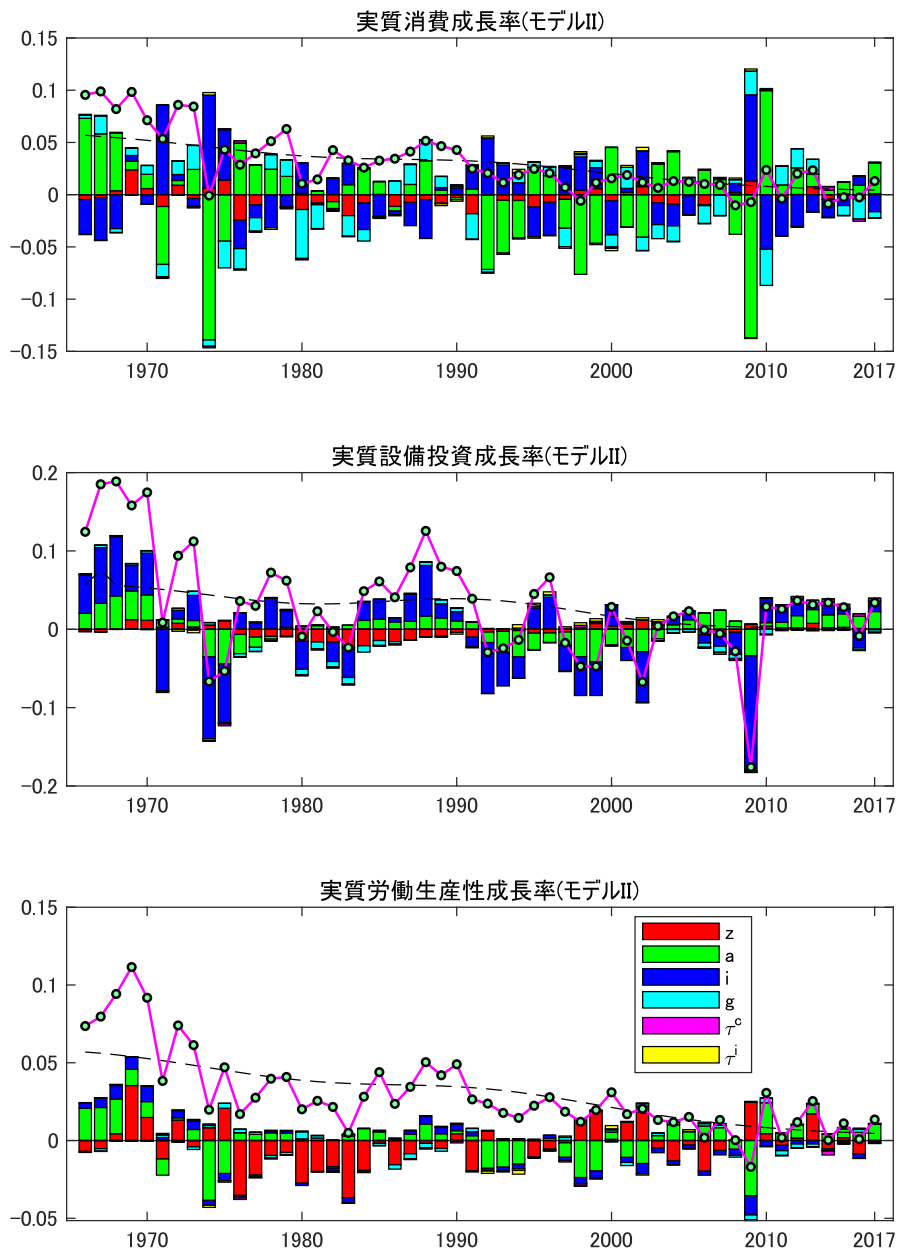


図 5: $\Delta \ln C_t$, $\Delta \ln I_t$, $\Delta \ln \Gamma_t$ のヒストリカル分解 (モデル II)

(注) モデル II が示唆する実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質労働生産性成長率のヒストリカル分解が図示されている。実線の推移は実際の実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質労働生産性成長率のデータの推移、破線は式 (22) ~ (24) の右辺第 3 項と右辺第 4 項の合計の推移を表している。積み上げ棒グラフは、実線の点線からの乖離がどのショックに依るものかを定量的に表している。

参考文献

- [1] An, Sungbea, and Frank Schorfheide. (2007) “Bayesian Analysis of DSGE Models,” *Econometric Reviews*, 26(2-4), 113-172.
- [2] Blanchard, Olivier J., and Charles M. Kahn. (1980) “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, 48(5), 1305-1311.
- [3] Caggiano, Giovanni, Efrem Castelnuovo, and Juan M. Figueres. (2017) “Economic Policy Uncertainty and Unemployment in the United States: A Nonlinear Approach,” CESifo Working Paper No. 7105.
- [4] Cogley, Timothy, and Thomas J. Sargent. (2002) “Evolving Post-World War II U.S. Inflation Dynamics,” In: Bernanke, Ben S. and Rogoff, Kenneth (eds.) *NBER Macroeconomics Annual 2001*, vol. 16. Cambridge, Mass. MIT Press, Cambridge, pp. 331-388.
- [5] Erceg, Christopher J., Luca Guerrieri, and Christopher Gust. (2006) “SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis,” *International Journal of Central Banking*, 2, 1-50.
- [6] Feenstra, Robert C., Robert Inklaar, and Marcel P. Timmer (2015) “The Next Generation of the Penn World Table,” *American Economic Review*, 105(10), 3150-3182.
- [7] Foerster, Andrew, Juan Rubio-Ramirez, Daniel F. Waggoner, and Tao Zha. (2014) “Perturbation Methods for Markov-Switching DSGE models,” NBER Working Paper No. 20390.
- [8] Franses, Philip H., Timo Teräsvirta, and Dick van Dijk. (2002) “Smooth Transition Autoregressive Models: A Survey of Recent Development,” *Econometric Review*, 21(1), 1-47.
- [9] Galí, Jordi. (1999) “Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations?” *American Economic Review*, 89(1), 249-271.
- [10] Geweke, John F. (1999) “Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication,” *Econometric Reviews*, 18(1), 1-73.
- [11] Hamilton, James D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [12] Herbst, Edward. (2015) “Using the “Chandrasekhar Recursions” for Likelihood Evaluation of DSGE Models,” *Computational Economics*, 45, 693-705.
- [13] Jesper, Lindé. (2004) “The Effects of Permanent Technology Shocks on Labor Productivity and Hours in the RBC model,” Sveriges Riksbank Working Paper Series, No.161.
- [14] Karabarbounis, Loukas, and Brent Neiman. (2013) “The Global Decline of the Labor Share,” NBER Working Paper No. 19136.

- [15] Kasuya, Munehisa. (2003) “Regime-Switching Approach to Monetary Policy Effects: Empirical Studies Using A Smooth Transition Vector Autoregressive Model,” Bank of Japan Working Paper Series 03-7.
- [16] Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott. (1982) “Time to Build and Aggregate Fluctuations,” *Econometrica*, 50(6), 1345-1370.
- [17] Liu, Philip, and Haroon Mumtaz. (2011) “Evolving Macroeconomic Dynamics in a Small Open Economy: An Estimated Markov Switching DSGE Model for the UK,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 43(7), 1443-1474.
- [18] Negro, Marco Del, and Frank Schorfheide. (2011) “Bayesian Macroeconometrics,” In: Geweke, John., Koop, Gary. and van Dijk, Herman (eds.) *The Oxford Handbook of Bayesian Economics*, Oxford University Press, Oxford, UK, pp. 293-389.
- [19] OECD (2020) *Revenue Statistics 2020*, OECD Publishing, Paris.
- [20] Sims, Christopher A. (1980) “Macroeconomics and Reality,” *Econometrica*, 48(1), 1-48.
- [21] Sims, Christopher A. (1993) “A 9 Variable Probabilistic Macroeconomic Forecasting Model,” In: Stock, James H. and Watson, Mark W (eds.) *Business Cycles, Indicators, and Forecasting*, vol. 28 of *NBER Studies in Business Cycles*. University of Chicago Press, Chicago, pp. 179-214.
- [22] Sims, Christopher A. (2002) “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, 20(1-2), 1-20.
- [23] Smets, Frank, and Rafael Wouters. (2003) “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area,” *Journal of the European Economic Association*, 1, 1123-1175.
- [24] Smets, Frank, and Rafael Wouters. (2007) “Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach,” *Journal of the European Economic Association*, 97, 586-606.
- [25] Teräsvirta, Timo. (1994) “Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models,” *Journal of the American Statistical Association*, 89(425), 208-218.
- [26] Teräsvirta, Timo. (2004) “Smooth Transition Regression Modeling,” In: Lütkepohl, Helmut. and Krätzig, Markus (eds.) *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. 222-242.

データ出典

- [1] 内閣府 「国民経済計算」

<https://www.esri.cao.go.jp/jp/sna/menu.html>, December 28, 2020.

- [2] University of Groningen and University of California, Davis, Average Annual Hours Worked by Persons Engaged for Japan [AVHWPEJPA065NRUG], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis
<https://fred.stlouisfed.org/series/AVHWPEJPA065NRUG>, December 28, 2020.
- [3] University of Groningen and University of California, Davis, Number of Persons Engaged for Japan [EMPENGJPA148NRUG], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis
<https://fred.stlouisfed.org/series/EMPENGJPA148NRUG>, December 28, 2020.
- [4] OECD (2020), Tax on personal income (indicator)
<https://data.oecd.org/tax/tax-on-personal-income.htm>, December 28, 2020.
- [5] OECD (2020), Tax on goods and services (indicator)
<https://data.oecd.org/tax/tax-on-goods-and-services.htm>, December 28, 2020.

補論：対数線形近似

理論モデルの式体系の対数線形化を行い、モデル全体の方程式体系を示す。

所得税率

$$\tilde{\tau}^i_t = \rho_{\tau^i} \tilde{\tau}^i_{t-1} + \epsilon_t^{\tau^i}, \epsilon_t^{\tau^i} \sim N(0, \sigma_{\tau^i}^2)$$

消費税率

$$\tilde{\tau}^c_t = \rho_{\tau^c} \tilde{\tau}^c_{t-1} + \epsilon_t^{\tau^c}, \epsilon_t^{\tau^c} \sim N(0, \sigma_{\tau^c}^2)$$

資本ストック遷移式

$$\left(\frac{k}{y}\right)_t \tilde{k}_t = (1 - \delta) \left(\frac{k}{y}\right)_{t-1} \frac{1}{(z)_t} (\tilde{k}_{t-1} - z_t^z) + \left(\frac{i}{y}\right)_t \tilde{i}_t$$

消費の限界効用

$$\begin{aligned} & (\lambda)_t \tilde{\tau}^c_t + (1 + (\tau^c)_t) (\lambda)_t \tilde{\lambda}_t = \\ & -\sigma \left(\left(\frac{c}{y}\right)_t - \theta \left(\frac{c}{y}\right)_{t-1} \frac{1}{(z)_t} \right)^{-\sigma-1} \left(\left(\frac{c}{y}\right)_t \tilde{c}_t - \theta \left(\frac{c}{y}\right)_{t-1} \frac{1}{(z)_t} (\tilde{c}_t - z_t^z) \right) \end{aligned}$$

投資関数

$$(\zeta)_t (\tilde{i}_t - \tilde{i}_{t-1} + z_t^z) = \tilde{q}_t + z_t^i + \beta (z)_{t+1}^{1-\sigma} (\zeta)_{t+1} (E_t \tilde{i}_{t+1} - \tilde{i}_t + E_t z_{t+1}^z)$$

トービンの q

$$\begin{aligned} \tilde{q}_t = & \beta \left(1 - (\tau^i)_{t+1} \right) \frac{(\lambda)_{t+1} (r)_{t+1}}{(\lambda)_t (z)_{t+1}^\sigma} (E_t \tilde{r}_{t+1} + E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \tilde{\lambda}_t - \sigma E_t z_{t+1}^z) - \\ & \beta \frac{(\lambda)_{t+1} (r)_{t+1}}{(\lambda)_t (z)_{t+1}^\sigma} E_t \tilde{\tau}^i_{t+1} + \beta \frac{(\lambda)_{t+1} (1 - \delta)}{(\lambda)_t (z)_{t+1}^\sigma} (E_t \tilde{q}_{t+1} + E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \tilde{\lambda}_t - \sigma E_t z_{t+1}^z) \end{aligned}$$

労働の限界不効用

$$(1 - (\tau^i)_t) (w)_t (\lambda)_t (\tilde{w}_t - \tilde{\lambda}_t) - (w)_t (\lambda)_t \tilde{\tau}^i_t = \frac{\chi}{(\gamma)_t^\chi} \tilde{l}_t$$

生産関数

$$\tilde{y}_t = z_t^a + (1 - (\alpha)_t) \tilde{l}_t + (\alpha)_t (\tilde{k}_{t-1} - z_t^z)$$

労働需要関数

$$z_t^a - (\alpha)_t \tilde{l}_t + (\alpha)_t (\tilde{k}_{t-1} - z_t^z) = \tilde{w}_t$$

資本ストック需要関数

$$z_t^a + (1 - (\alpha)_t) \tilde{l}_t + ((\alpha)_t - 1) (\tilde{k}_{t-1} - z_t^z) = \tilde{r}_t$$

外生需要

$$\tilde{g}_t = \rho_g \tilde{g}_{t-1} + \epsilon_t^g, \epsilon_t^g \sim N(0, \sigma_g^2)$$

所得税収

$$\left(\frac{r^i}{y}\right)_t \tilde{r}^i_t = \tilde{\tau}^i_t + (\tau^i)_t \frac{(w)_t}{(\gamma)_t} (\tilde{w}_t + \tilde{l}_t) + (\tau^i)_t \left(\frac{k}{y}\right)_{t-1} \frac{(r)_t}{(z)_t} (\tilde{r}_t + \tilde{k}_{t-1} - z_t^z)$$

消費税込

$$\tilde{r}^c_t = \frac{1}{(\tau^c)_t} \tilde{\tau}^c_t + \tilde{c}_t$$

資源制約

$$\tilde{y}_t = \left(\frac{c}{y}\right)_t \tilde{c}_t + \left(\frac{i}{y}\right)_t \tilde{i}_t + \left(\frac{g}{y}\right)_t \tilde{g}_t$$

労働生産性

$$\tilde{\gamma}_t = \tilde{y}_t - \tilde{l}_t$$

構造ショック

$$z_t^z = \rho_z z_{t-1}^z + \epsilon_t^z, \epsilon_t^z \sim N(0, \sigma_z^2)$$

$$z_t^a = \rho_a z_{t-1}^a + \epsilon_t^a, \epsilon_t^a \sim N(0, \sigma_a^2)$$

$$z_t^i = \rho_i z_{t-1}^i + \epsilon_t^i, \epsilon_t^i \sim N(0, \sigma_i^2)$$