

確率的トレンドを考慮した DSGE モデルの評価 –Bayesian DSGE-VAR モデルによる分析– *

慶應義塾大学経済学部 廣瀬康生研究会 卒業論文

小池泰貴 †

2014 年 1 月

概要

本稿は、動学的確率的一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium DSGE) モデルにおける確率的トレンド (Stochastic Trend) の導入が、日本のデータへの当てはまりをどの程度改善するかという点について、DSGE-VAR モデルという手段を使いその評価を行うものである。通常、ベイズ統計学の文脈でモデルの当てはまりを評価する際は周辺尤度が用いられるが、標本期間の僅かな差や、事前分布の選択に左右されやすいという問題点があるため、DSGE-VAR モデルを評価の手段として用いた。分析の結果、確率的トレンドモデルは Smets and Wouters(2007) のような通常のレベルへの TFP ショックを持つ決定的トレンド (Deterministic Trend) モデルに比べて定式化の誤りの程度が小さいことが分かった。また、両モデルの DSGE モデルと DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答関数を比較することで、決定的トレンドモデルでは生産性ショックが労働時間に対し負の作用を与えるのに対し、確率的トレンドモデルでは正に作用すること、また後者の反応の方が、データから支持されることが分かった。以上の結果は、Gali(1999) らの「生産性ショックに労働時間はどのように反応するか」という議論の文脈において生産性ショックは労働時間に対し正の影響を与える、という立場を支持するものとして考えることができる。また本稿では、先行研究である Hirose and Kurozumi(2012) に従い、ゼロ金利期間を含めて推計を行っているが、ゼロ金利期間を含めない場合も、確率的トレンドモデルの方が定式化の誤りの程度が少ないことが確認された。本稿の結果はこの意味で頑健性のあるものである。しかし、同時にゼロ金利期間を含めた場合に定式化の誤りの程度が大幅に増加している可能性も確認され、この結果は推定期間にゼロ金利期間を含めた場合のモデルの有効性に疑問を投げかけている。

* 本稿は、慶應義塾大学経済学部の卒業論文である。本稿の作成にあたっては、指導教官の廣瀬康生氏 (慶應義塾大学) をはじめ、中妻照雄氏 (慶應義塾大学)、研究会の先輩である寺本和弘氏 (東京大学経済学研究科) まで、多くの方々から有益且つ熱心なコメントを頂戴した。ここに記して感謝の意を表したい。廣瀬研究会で DSGE モデルを用いたマクロ経済分析法を学び、有益な議論ができたことは貴重な経験であった。また本研究会で学ぶ中で形成された問題意識、興味関心は筆者の進路選択にも大きな影響を及ぼすことになった。改めて指導教官の廣瀬康生氏には深く感謝の辞を述べたい。

† 慶應義塾大学経済学部経済学科 4 年生

目次

1	序論	3
2	モデルの定式化とベイズ推定の方法	6
2.1	DSGE モデルにおける確率的トレンド	6
2.2	DSGE モデルの導出	7
2.3	DSGE モデルの状態空間表現	12
2.4	DSGE-VAR モデルによるベイズ分析	14
3	DSGE-VAR モデルによる確率的トレンドの評価	19
3.1	確率的トレンドモデルと決定的トレンドモデルの違い	19
3.2	データ	19
3.3	DSGE モデルのパラメーター θ の事前分布	20
3.4	事後分布の推計結果	21
3.5	ベイジアン・インパルス応答関数の比較	23
3.6	結果の解釈	26
3.7	結果の頑健性	27
4	結論	29
	Appendix1 : 対数線形近似	30
	Appendix2 : Dynare による DSGE-VAR モデルの分析	32
	参考文献	33

1 序論

本稿は、動学的確率的一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium DSGE) モデルにおける確率的トレンド (Stochastic Trend) の導入が、日本のデータへの当てはまりをどの程度改善するかという点について DSGE-VAR モデルという手段を使いその評価を行うものである。

DSGE モデルとは、ミクロ的基礎付け、すなわち企業や家計といった各経済主体の最適化の帰結として導出されるモデルであり、理論整合性を維持した上で現実の経済を説明できるというその有用性からアカデミックの枠を超え、現在各国の中央銀行や研究機関を中心にその研究、活用が進められている。このように、現代マクロ経済学において、理論と現実の経済をつなぐ役割を担っている DSGE モデルであるが、その発端とされている最適成長モデル (Ramsey,1928 Cass,1965 Koopmans,1965) は元来理論分析用のモデルであった。同モデルは長期の分析を主眼にしており、景気変動等に応用されるものではないと当時は考えられていたが、その考えを一変させたのが、Kydland and Prescott(1982) である。彼らの手によりモデルが実際の景気循環に応用可能であることが示されて以来、DSGE モデルは現実のマクロ経済データとの整合性を高める方向性へと発展していくことになった。特に、近年では価格や賃金の硬直性、投資の調整コストといった摩擦要素を組み込むことで DSGE モデルのフィットは VAR モデルのそれと遜色のない程度にまで高まっている。

また実証面に目を向けると、同モデルの初期段階では、DSGE モデルのパラメーターを手置きし、現実のデータの生の特性を示す VAR モデルのインパルス応答と同様の反応が見られるように調整を加え、シミュレーションを行っていた (Calibration)。しかし近年、Smets and Wouters (2003) を先駆けとして、ベイズ推定によりモデル全体を同時推計する手法が確立して以来、DSGE モデルのパラメーターのベイズ推計を行う論文の数は年々急速に増加している。このように、DSGE モデルは、実際のデータの説明力を高めるというニーズに応えるべく、理論、実証の両輪で発展してきたのである。

本稿で分析を行う確率的トレンド (Stochastic Trend) も、DSGE モデルの現実のデータへのフィットを高めるための試みとして上記の流れに位置づけることができる。DSGE モデルにおけるトレンドの推定は、DSGE モデル内の変数と実際のマクロデータを対応させるために、実際のデータに HP フィルタ等のアドホックなフィルタリングを施すことへの批判から生じたものであった。Smets and Wouters(2007) ではトレンドをモデルの中に組み込み、トレンドをモデルと整合的な形で同時推計する手法を用いることでアドホックなフィルターの使用を避けることに成功している。しかし、同論文のモデルは推計期間でトレンドが一定 (Deterministic Trend) と仮定しているという点で制約的であり、最近では Justiniano ,Primiceri and Tambalotti(2010) に見られるように、外生的ショックで変動する確率的トレンド (Stochastic Trend) を使うことで恣意性を軽減し、データへのフィットを高めることが試まれている。

しかし、このような確率的トレンドがデータへの当てはまりをいかにして高めているか、という点に関する実証研究は行われていない。確率的トレンドがモデルの当てはまりを改善するという動

機で導入されたものならば、それは統計的に検証されるべき問題であろう。その評価を行うにあたり、本稿で用いる DSGE-VAR モデルが有用であることを説明する。通常、ベイズ統計学の文脈においてモデル間の当てはまりを比較する統計量として用いられるものが周辺尤度であり、DSGE モデルを評価する際も頻繁に用いられている。Smets and Wouters(2003) でも、VAR モデルと DSGE モデルの事後オッズ比（周辺尤度から計算される統計量）を計算することで、DSGE モデルが VAR モデルと遜色ないと結論付けている。しかし、DSGE モデル全体は次数が無限大の VAR モデルとして表現されることから分かるように、DSGE モデルと VAR モデルは互いに入れ子構造になっていない。こうしたモデルを比較する場合、Smets and Wouters(2003) のように事後オッズ比を用いると、パラメーターの事前分布いかんによっては正しくないモデルが選択されるという「Lindley の逆説 (1957)」が生じることを、Sims(2003) が批判している。

この批判に応える形で Del Negro and Shorfheide(2004) により提案されたのが DSGE-VAR モデルである。DSGE-VAR モデルでは VAR のパラメーターを推定する際の事前分布として DSGE モデルによる制約を課す。DSGE モデルの制約の度合いを変更させ、どのような割合の時に最もモデルの当てはまりがよくなるかを計測することで、DSGE モデルのデータへの当てはまりの良さを定量的に評価することが可能になる。

このような観点から、本稿では事後オッズ比ではなく DSGE-VAR により評価を行う。つまり、前述の確率的トレンドを組み込んだモデルと、Smets and Wouters(2007) にみられるような決定的トレンドモデルの当てはまりを比較する。より具体的には、VAR モデルに DSGE モデルに基づく理論値を用いて制約をかけ、どの程度制約をかけた時に VAR モデルの周辺尤度が最大になるかを両モデル間で比較する。最適な周辺尤度をもたらす制約が強いというのは、DSGE モデルが VAR モデルを推定する上で有益な情報をもたらしているといえるため、制約が強いほうが当てはまりがよいと結論づけることができる。また、DSGE-VAR モデルによる分析には推定された最適な DSGE-VAR モデルと DSGE モデルのインパルス応答を比較することで、どの変数の経路から定式化の誤りが生じているのかという点について洞察を得ることができるという利点もある。

本稿の貢献は確率的トレンドの導入が日本のデータを推計する場合に、どの程度 DSGE モデルの当てはまりを改善するかという点を、DSGE-VAR モデルを使用して分析していることである。先に述べたように、同様の論点を扱っている研究は存在しない。また、DSGE-VAR を用いて日本のデータを分析したものは渡部 (2009)、藤原・渡部 (2011) しか存在せず、それらは主として DSGE-VAR モデルの紹介目的で書かれたものであり、本稿のように特定のモデルの当てはまりを論じることを主としている訳ではない。また、中規模 DSGE モデルを日本のデータを用いて推計したのも本稿が初となっている。

本稿の分析により、確率的トレンドモデルの方が決定的トレンドモデルと比較して定式化の誤りの程度が小さいことが明らかになった。また、両モデルの DSGE モデルと DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答を比較することで、生産性ショックが労働時間に波及する経路の改善を通じてデータへの当てはまりを改善している可能性が確認された。このような結果は、Gal(1999) らの「生産性ショックに労働時間はどのように反応するか」という議論の中で生産性ショックは労働時間に対し正の影響を与えるという立場を支持するものである。さらに、先の

Smets and Wouters(2007) では、生産性ショックに対し、労働時間は負に反応するという現象がみられるが、本稿で用いている「決定的トレンドモデル」における生産性ショックの定式化は Smets and Wouters(2007) のものと同一のものである。そのため、Smets and Wouters(2007) にみられる以上の現象は、生産性ショックに関する定式化の誤りに起因するものであると結論付けることができ、この点からも本稿は上記の議論に貢献しているといえる。

また本稿では先行研究である Hirose and Kurozumi(2012) に従い、ゼロ金利期間を含めて推計を行っているが、ゼロ金利期間を含めない場合でも、同様に確率的トレンドモデルの方が定式化の誤りの程度が少ないという結果を得られることが確認された。本稿の結果はこの意味で頑健性のあるものであるといえる。しかし同時にゼロ金利を含めると場合に定式化の誤りの程度が大幅に増加している可能性も確認された。この結果は推定期間にゼロ金利期間を含めた場合のモデルの有効性に疑問を投げかけている。

2 モデルの定式化とベイズ推定の方法

本章では、まず分析対象である確率的トレンドを導入後、本稿で用いる DSGE モデルを導出する。その後、分析手段である DSGE-VAR を理解するために DSGE モデルの状態空間表示について解説を加える。最後に、DSGE-VAR モデルの説明を行う。DSGE-VAR モデルに関しては日本語の文献が少なく、まだ浸透していないことを考慮して、導出方法からその解釈まで詳細な解説を加える。

2.1 DSGE モデルにおける確率的トレンド

本稿で用いる DSGE モデルは、Christiano, Eichenbaum, and Evans(2005) のモデルに均斉成長トレンドと追加的な構造ショックを導入した Smets and Wouters(2007) を改良したものである。本稿の目的に合わせ、Smets and Wouters(2007) では決定的 (Deterministic) に扱われているトレンドを外生的ショックで変動する確率的トレンド (Stochastic Trend) に変更している。本節では、廣瀬 (2012) に従い、本稿の分析対象である確率的トレンドについて説明する。本モデルでは中間財企業 $f \in (0, 1)$ は独占的競争の下で家計によって提供された労働サービス $l_t(f)$ と稼働資本ストック ($u_t K_{t-1}(f)$) を用いて、差別化された中間財 Y_t を生産する。中間財企業の生産技術は以下のようにあらわされる。

$$Y_t(f) = (Z_t(f)l_t(f))^{1-\alpha} (u_t K_{t-1}(f))^\alpha - \Phi Z_t \quad (1)$$

ここで、 $\alpha \in (0, 1)$ は生産投入に占める資本比率、 $-\Phi Z_t$ は Φ を正のパラメーターとして生産にかかる固定費用を表している。 Z_t が本論文において重要な働きを持つ中間財の技術水準であり、以下の確率過程に従うとする。

$$\log Z_t = \log z + \log Z_{t-1} + z_t^z \quad (2)$$

ここで、 $\log Z_t - \log Z_{t-1}$ は技術進歩率であることから、 $z (> 1)$ はグロスの技術進歩率、 z_t^z は技術進歩率への外生ショックを表す。この結果として、 Z_t 及びその影響を受ける経済変数は非定常な確率過程 (ドリフト項付きランダムウォーク) に従い、定常状態においても一定の伸び率で上昇することになる。このような確率過程に従う生産技術を確率的トレンド (Stochastic Trend) と呼ぶ。名前の「確率的」の部分は確率的ショック z_t^z に由来しており、この項がなければ決定的トレンド (Deterministic Trend) になる。次節で説明するように、本稿のモデルは全ての実体経済変数の成長率が技術進歩率の定常値 ($\log z$) に収斂するように工夫が施されており、このようなモデルは「均斉成長 (balanced growth) 制約を満たす」と呼ばれ、すべての経済変数が収斂する成長率の事を均斉成長率と呼ぶ。この制約を満たすモデルは、生産技術の進歩を経済成長の源泉として明示的に取り扱うことによって、HP フィルタ等のアドホックなフィルタリングに頼ることなく、理論整合的な形でトレンドの変化を含む長期要因と短期要因を一括して分析することを可能にする。また、確率的ショック z_t^z がいない場合、決定的トレンド (Deterministic Trend) になり、本稿ではこ

のショックがあるモデルを「確率的トレンド DSGE モデル」、代わりに TFP へのレベルショックの変更したものを「決定的トレンド DSGE モデル」として区別し*¹、それぞれのモデルの当てはまりの良さを DSGE-VAR を用いて比較していくことになる。

2.2 DSGE モデルの導出

本節では、2.1 節で述べた確率的トレンドを前提に、DSGE モデルの導出及び解説を行う。なお、本稿は確率的トレンド及び DSGE-VAR の適用に重点を置いているので、DSGE モデル自体の詳細な説明は行わない。詳しい導出過程及び DSGE モデルにおけるミクロ的基礎付けの解釈は江口 (2011)、加藤 (2006)、廣瀬 (2012) 等を参照されたい。

2.2.1 家計

家計 $h \in (0, 1)$ は消費材、 $C_t(h)$ を購入することで効用を得て、差別化された労働サービス l_t を企業家に提供することで不効用が生じる。各家計の選好は、以下の効用関数で表される。

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e^{z_t^b} \left[\frac{(C_t(h) - \theta C_{t-1}(h))^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{Z_t^{1-\sigma} e^{z_t^l} l_t(h)^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \quad (3)$$

ここで、 $\beta \in (0, 1)$ は主観的割引率、 $\sigma > 0$ は異時点間代替の弾力性の逆数、 $\theta \in (0, 1)$ は消費者の習慣形成の度合いを示し、 $\chi > 0$ は労働供給の弾力性の逆数を示す。 z_t^b と z_t^l はそれぞれ異時点間の選好と、労働供給に対する外生ショックである。労働供給の不効用を表す項には、 $Z_t^{1-\sigma}$ が掛かっているが、これは Erceg, Guerriere, and Gust (2006) と同様に前述の均斉成長を保証する工夫で、 Z_t はまた前述の技術水準である。家計の予算制約式は次のように与えられる。

$$C_t(h) + I_t(h) + \frac{B_t(h)}{P_t} = W_t(h)l_t(h) + R_t^k u_t(h)K_{t-1}(h) + R_{t-1}^n \frac{B_{t-1}(h)}{P_t} + T_t(h) \quad (4)$$

ここで、 P_t は物価水準、 $W_t(h)$ は実質賃金、 R_t^n は名目粗利子率、 R_t^k は資本の実質レンタル料、 $u_t(h)$ は資本稼働率 $K_{t-1}(h)$ は資本ストックを表し、 $T_t(h)$ は政府による一括税や企業からの配当から構成される。ここで、完備保険市場の仮定を課すことによって、各家庭は同質とみなすことができるため、インデックス h を外すことが可能である。各家計は以上の制約条件の下で期待生涯効用を最大化する。そのための一階の条件は

$$\Lambda_t = e^{z_t^b} (C_t - \theta C_{t-1})^{-\sigma} - \beta \theta E_t e^{z_{t+1}^b} (C_{t+1} - \theta C_t)^{-\sigma} \quad (5)$$

$$\Lambda_t = \beta E_t \Lambda_{t+1} \frac{R_t^n}{\pi_{t+1}} \quad (6)$$

である。なお、ここで Λ_t はラグランジュ乗数で、消費の限界効用を表す。また、 $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ である。

労働供給に関し、独占的競争の仮定より家計は賃金の交渉力を持つので、中間財生産企業のの差別

*¹ モデルの具体的な変更については、第三章で詳しく扱う。

化された労働サービスに対する労働需要関数の下で、各家計は最適な賃金を決定することになる。そのためまず、労働需要関数を導出する。中間財生産企業は差別化された労働サービスを以下の CES 関数に従い集計する。

$$l_t(f) = \left[\int_0^1 l_t(f, h)^{\frac{1}{1+\lambda_t^w}} dh \right]^{1+\lambda_t^w} \quad (7)$$

λ_t^w は θ_t^w を差別化された労働サービスの代替弾力性とする、 $\lambda_t^w = 1/(\theta_t^w - 1) > 0$ で定義される変数であり、後に示されるように、賃金のマークアップ率を表す。この集計式を所与として、中間財企業は費用 $\int_0^1 W_t(f, h)l_t(f, h)dh$ を最小化する。最小化問題を解くと労働需要関数と集計された賃金

$$l_t(f) = \left[\frac{W_t(h)}{W_t} \right]^{-\frac{1+\lambda_t^w}{\lambda_t^w}} l_t \quad (8)$$

$$W_t = \left[\int_0^1 W_t(h)^{-\frac{1}{\lambda_t^w}} dh \right]^{-\lambda_t^w} \quad (9)$$

が導出される。なお、全ての中間財企業が同一の意思決定を行うと仮定して各企業のインデックスを省略している。

各家計は、労働需要関数を所与として、最適な賃金を決定するが、ここでは Calvo(1983) 型の賃金の硬直性を導入する。すなわち、各期において $1 - \xi_w \in (0, 1)$ の割合の家計のみが賃金を最適化できると仮定する。さらに、Smets and Wouters(2007)に見られるように、残りの ξ_w の割合の家計の賃金は、均斉成長率の定常値 z と、一期前のインフレ率 π_{t-1} および定常状態のインフレ率 π の加重平均に従って、名目賃金をアドホックに決定すると仮定する。 $\gamma_w \in (0, 1)$ を一期前のインフレ率を参照するウェイトとすると、 $t + j$ 期まで賃金変更の機会に恵まれなかった家計の実質賃金は以下ようになる。

$$W_{t+j}(h) = z^j W_t(h) \prod_{k=1}^j \left[\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right] \quad (10)$$

賃金の最適化問題は

$$\begin{aligned} \max E_t \Sigma_{j=0}^{\infty} (\beta \xi_w)^j & \left[\Lambda_{t+j} l_{t+j}(h) z^j W_t(h) \prod_{k=1}^j \left[\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right] \right. \\ & \left. - \frac{e^{z_{t+j}^b} Z_{t+j}^{1-\sigma} e^{z_{t+j}^l} l_{t+j}(h)^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\ \text{s.t. } l_{t+j}(h) & = \left[\frac{z^j W_t(h)}{W_{t+j}} \prod_{k=1}^j \left[\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right] \right]^{-\frac{1+\lambda_t^w}{\lambda_t^w}} l_{t+j} \end{aligned}$$

であり、 W_t^o を最適な実質賃金とすると、一階の条件は

$$\begin{aligned}
E_t \sum_{j=0}^{\infty} & \left[(\beta \xi_w)^j \frac{1}{\lambda_{t+j}^w} \Lambda_{t+j} l_{t+j} \left[\frac{z^j W_t^o}{W_{t+j}} \prod_{k=1}^j \left\{ \left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right\} \right]^{-\frac{1}{\lambda_{t+j}^w} - 1} \right. \\
& \times \left\{ z^j W_t^o \prod_{k=1}^j \left\{ \left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right\} - (1 + \lambda_{t+j}^w) \frac{e^{z_{t+j}^b} e^{z_{t+j}^l} Z_{t+j}^{1-\sigma}}{\Lambda_{t+j}} \right. \\
& \left. \left. \times \left(l_{t+j} \left[\frac{z^j W_t^o}{W_{t+j}} \prod_{k=1}^j \left\{ \left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right\} \right]^{-\frac{1}{\lambda_{t+j}^w} - 1} \right)^x \right\} \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

となり、集計された賃金 (9) は

$$W_t = (1 - \xi_w) \left((W_t^o)^{-\frac{1}{\lambda_t^w}} + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_w^j \left[z^j W_{t-j}^o \prod_{k=1}^j \left[\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_w} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right] \right] \right) \quad (12)$$

となる。

次に、家計による投資 $I_t(h)$ とそれに伴う資本ストック $K_{t-1}(h)$ の蓄積及び資本稼働率の決定について考える。なお、本来投資に関する意思決定を行うのは企業であるが、本稿ではその企業を所有するのは家計であると考え、家計の意思決定としてモデル化をしている。期初において、家計は資本ストック K_{t-1} を保有しており、その稼働率を調整した $u_t(h)K_{t-1}$ を中間財企業に実質レンタル率 R_t^k で貸し出す。また、家計による投資は以下の資本蓄積式に従う。

$$K_t(h) = (1 - \delta(u_t(h))) K_{t-1} + \left[1 - S \left(\frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} \frac{e^{z_t^i}}{z} \right) \right] I_t(h) \quad (13)$$

ここでは、Greenwood, hercowitz, and Huffman(1988) に従い、資本減耗率は資本稼働率に依存して変化するという仮定を置いている。具体的には、関数 $\delta(\cdot)$ は $\delta' > 0$ 、 $\delta'' > 0$ 、 $\delta(u) = \delta \in (0, 1)$ 、 $\mu = \delta'(u)/\delta''(u) > 0$ (u は定常状態における資本稼働率) という性質を持つ。 $S(\cdot)$ は投資の調整コストを表し、 $S(x) = (x - 1)^2 / (2\xi)$ ($\xi > 0$ はパラメーター) という二次関数形を設定する。 z_t^i は投資の調整コストに対するショックである。この資本ストック蓄積式を家計の効用最大化問題の制約式として、ラグランジュ乗数を Λ_t^k とすると、 I_t 、 u_t 、 K_t についての一階の条件はそれぞれ以下のよう求められる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial I_t(h)} : 1 = & q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{e^{z_t^i}}{z} \right) - S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{e^{z_t^i}}{z} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{e^{z_t^i}}{z} \right] \\
& + \beta E_t \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} q_{t+1} S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \frac{e^{z_{t+1}^i}}{z} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \frac{e^{z_{t+1}^i}}{z} \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t(h)} : R_t^k = q_t \delta'(u_t) \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t(h)} : q_t = \beta E_t \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left[R_{t+1}^k u_{t+1} + q_{t+1} (1 - \delta(u_{t+1})) \right] \quad (16)$$

ここで、 $q_t = \Lambda_t^k / \Lambda_t$ はトービンの q と呼ばれるものであり、限界効用単位で測った資本の実質価値を表している。なお、先述したように各家計のインデックス h は計算の途中で省略されている。

2.2.2 最終財企業

最終財企業は、完全競争の下で中間財、 $Y_t(f)$ 、 $f \in (0, 1)$ から次の生産技術を用いて最終財 Y_t を生産する。

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(f)^{\frac{1}{1+\lambda_t^p}} df \right)^{1+\lambda_t^p} \quad (17)$$

ここで、 λ_t^p は θ_t^p を中間財の代替弾力性として、 $\lambda_t^p = 1/(\theta_t^p - 1) > 0$ で定義される変数であり、後に示されるように、価格のマークアップ率を表す。最終財企業は最終財価格 P_t と中間財 f の価格 $P_t(f)$ を所与として利潤 $P_t Y_t - \int_0^1 P_t(f) Y_t(f) df$ を最大化するような中間財の投入量 $Y_t(f)$ を決定する。そのための一階の条件は

$$Y_t(f) = \left(\frac{P_t(f)}{P_t} \right)^{-\frac{1+\lambda_t^p}{\lambda_t^p}} Y_t \quad (18)$$

であり、これは中間財の需要関数として解釈することができる。これを (17) に代入すると、最終財価格は以下のように表される。

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(f)^{-\frac{1}{\lambda_t^p}} df \right)^{\lambda_t^p} \quad (19)$$

最終財は消費、投資、それ以外に用いられるため、従って最終財の資源制約は

$$Y_t = C_t + I_t + gZ_t e^{z_t^g} \quad (20)$$

ここで、 $gZ_t e^{z_t^g}$ は政府購入や純輸出といった消費と投資以外の外生需要項目を表しており、 g はこの項目のウェイトのパラメーター、 z_t^g は外生需要ショックを表す。

2.2.3 中間財企業

2.1 で説明したように、中間財企業の生産技術は以下のように記述される。

$$Y_t(f) = (Z_t(f) l_t(f))^{1-\alpha} (u_t K_{t-1}(f))^\alpha - \Phi Z_t$$

ここで、 $\alpha \in (0, 1)$ は生産投入に占める資本比率、 $-\Phi Z_t$ は Φ を正のパラメーターとして生産にかかる固定費用を表している。 Z_t は前述の通り、以下の確率過程に従う。

$$\log Z_t = \log z + \log Z_{t-1} + z_t^z$$

上記の生産技術の下で、企業は生産費用 $W_t l_t(f) + R_t^k u_t K_{t-1}(f)$ を最小化するように労働サービスと稼働資本ストックを決定する。 $mc_t(f)$ をラグランジュ乗数とすると、一階の条件は

$$mc_t = \left(\frac{W_t}{(1-\alpha)Z_t} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{R_t^k}{\alpha} \right)^\alpha \quad (21)$$

である。すべての中間財企業で同一になるため、インデックス f は省略されている。この下で、生産関数 (1) は以下のように集計される。

$$Y_t d_t = (Z_t l_t)^{1-\alpha} (u_t K_{t-1})^\alpha - \Phi Z_t \quad (22)$$

ここで、 $d_t = \int_0^1 (P_t(f)/P_t)^{-\frac{1+\lambda_t^p}{\lambda_t^p}} df$ は価格のばらつきを表す。

費用最小化問題の後には、最終財企業からの中間財への需要関数を所与として価格の決定を行うが、ここで、Calvo(1983) 型の価格硬直性に直面していると仮定する。すなわち、各期において $1 - \xi_p \in (0, 1)$ の割合の企業のみが価格を最適化できると仮定する。さらに、残り ξ_p の割合の企業は、一期前のインフレ率 π_{t-1} と定常状態のインフレ率 π の加重平均に従って価格を設定するとする。この仮定のもとで、 t 期に価格を最適化した企業が企業 f が $t+j$ 期まで最適化できなかった場合、 $\gamma_p(0, 1)$ を一期前のインフレ率を参照するウェイトとすると

$$P_{t+j}(f) = P_t(f) \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \pi \right) \quad (23)$$

であり、利潤最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{P_t(f)} \quad & E_t \sum_{j=0}^{\infty} \xi_p^j \left(\beta^j \frac{\Lambda_{t+j}}{\Lambda_t} \right) \left[\frac{P_t(f)}{P_t} \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \pi \right) - mc_{t+j} \right] Y_{t+j}(f) \\ \text{s.t.} \quad & Y_{t+j} = \left[\frac{P_t(f)}{P_t} \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \pi \right) \right]^{\frac{1+\lambda_{t+j}^p}{\lambda_{t+j}^p}} Y_{t+j} \end{aligned}$$

を解くと、一階の条件として

$$\begin{aligned} E_t \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\beta \xi_p)^j \frac{\Lambda_{t+j}}{\Lambda_t} \frac{1}{\lambda_{t+j}^p} \left[p_t^o \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right) \right]^{\frac{1+\lambda_{t+j}^p}{\lambda_{t+j}^p}} Y_{t+j} \right. \\ \left. \times \left[p_t^o \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right) - (1 + \lambda_{t+j}^p) mc_{t+j} \right] \right] \quad (24) \end{aligned}$$

ここで、最適化された P_t を P_t^o として、 $p_t^o = P_t^o/P_t$ としている。この時、最終財価格は以下のように書き換えられる。

$$1 = (1 - \xi_p) \left[(p_t^o)^{-\frac{1+\lambda_{t+j}^p}{\lambda_{t+j}^p}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[p_{t-j}^o \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda_{t+j}^p}} \right] \quad (25)$$

また、価格のばらつきは以下のように書き換えられる。

$$d_t = (1 - \xi_p) \left[(p_t^o)^{-\frac{1}{\lambda_t^p}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[p_{t-j}^o \prod_{k=1}^j \left(\left(\frac{\pi_{t+k-1}}{\pi} \right)^{\gamma_p} \frac{\pi}{\pi_{t+k}} \right) \right]^{\frac{1+\lambda_{t+j}^p}{\lambda_{t+j}^p}} \right]$$

2.2.4 中央銀行

中央銀行は名目金利を操作することで金融政策を行っており、その決定ルールは Taylor(1993) による。

$$\log R_t^n = \phi_r \log R_{t-1}^n + (1 - \phi_r) \left[\log R^n + \phi_\pi \left(\frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \log \frac{\pi_{t-j}}{\pi} \right) + \phi_y \log \frac{Y_t}{Y_t^*} \right] + z_t^r \quad (26)$$

$\phi_r \in (0, 1)$ は金利スムージングの度合いを示すパラメーター、 R^n は名目粗利率の定常値、 ϕ_{pi} 、 $\phi_y > 0$ はそれぞれインフレ率と GDP ギャップに対する利率の反応を表す。 z_t^r は金融政策ショックであり、中央銀行による予期しない金融緩和、引き締めを意味する。潜在生産量は

$$Y_t^* = (Z_t l)^{1-\alpha} (u k Z_{t-1})^\alpha - \Phi Z_t \quad (27)$$

で定義される。ここで、 l, k は後程説明するトレンド除去後の労働と資本ストックの定常値である。

2.2.5 構造ショックとトレンドの除去

本モデルには7つのショックが含まれており、それぞれのショックは定常な1階の自己回帰過程に従うと仮定する。

$$z_t^x = \rho_x z_{t-1}^x + \epsilon_t^x \quad (28)$$

ここで、 $x \in (z, b, w, g, i, p, r)$ について、 $\rho \in (0, 1)$ は自己回帰係数を表し、 ϵ_t^x は平均0、分散 σ_x^2 の正規分布に従うものとする。

また、2.1節で述べたように、非定常な確率的トレンドを含むモデルであるため、モデルの定常状態を規定するためには、トレンドを持ついくつかの実体変数から以下のようにトレンドを除去する必要がある。

$$y_t = \frac{Y_t}{Z_t}, c_t = \frac{C_t}{Z_t}, w_t = \frac{W_t}{Z_t}, i_t = \frac{I_t}{Z_t}, k_t = \frac{K_t}{Z_t}, \lambda_t = \Lambda_t Z_t$$

導出過程は廣瀬 (2012) 等を参照されたい。

2.3 DSGE モデルの状態空間表現

前節で導出した DSGE モデルを線形方程式体系に変換し、データと関連付けるために対数線形化を施す。^{*2}その後、Sims(2002) の方法に従い、行列表示すると以下のようになる。

$$\mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{s}_t = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{\Psi}_0 \epsilon_t + \mathbf{\Pi}_0 \eta_t \quad (29)$$

ただし、 $\mathbf{\Gamma}_0, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Psi}_0, \mathbf{\Pi}_0$ は構造パラメーターによって表される係数行列、 \mathbf{s}_t は内生変数ベクトル、 ϵ_t は外生ショックのベクトル、 η_t は $E_t \eta_{t+1} = 0$ を満たす予測誤差ベクトルである。

^{*2} 巻末の Appendix に本稿のモデルを対数線形近似したものを掲載している。

ここでは、モデルの解が一意に定まるケースのみを考えると、上の式は以下のように解くことができる。これを DSGE モデルの合理的均衡解と呼ぶ。

$$\mathbf{s}_t = \Theta_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Theta_0 \varepsilon_t \quad (30)$$

Θ_1, Θ_0 はモデルの構造、および DSGE モデルのパラメーター θ によって規定されており、内生変数ベクトル \mathbf{s}_t は一階の自己回帰過程 (VAR(1)) に従う。次節で DSGE-VAR のベイズ推定を行うには、モデル内の変数と推定に使用するデータを対応づける必要がある。前章で導出した DSGE モデルのうち、推定に使用するデータは Y_t (実質 GDP 成長率), C_t (実質消費成長率), I_t (労働時間), W_t (実質賃金), l_t (労働時間), P_t (物価), R_t^n (名目短期金利) の 7 系列であり、以下のようにモデル内のパラメーター及び内生変数と関連付けられる。

$$\begin{bmatrix} 100\Delta \log Y_t \\ 100\Delta \log C_t \\ 100\Delta \log I_t \\ 100\Delta \log W_t \\ 100 \log l_t \\ 100\Delta \log P_t \\ 100 \log R_t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* \\ z^* \\ z^* \\ z^* \\ l^* \\ \pi^* \\ r^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1} + z_t^z) \\ 100(\tilde{c}_t - \tilde{c}_{t-1} + z_t^z) \\ 100(\tilde{l}_t - \tilde{l}_{t-1} + z_t^z) \\ 100(\tilde{w}_t - \tilde{w}_{t-1} + z_t^z) \\ 100\tilde{l}_t \\ 100\tilde{\pi}_t \\ 100\tilde{r}_t^n \end{bmatrix}$$

この式は観測方程式 (observation equation) と呼ばれ、

$$\mathbf{y}_t = [100\Delta \log Y_t, 100\Delta \log C_t, 100\Delta \log I_t, 100\Delta \log W_t, 100 \log l_t, 100\Delta \log P_t, 100 \log R_t^n]' \\ \hat{\mathbf{s}}_t = [\mathbf{s}_t, \tilde{y}_{t-1}, \tilde{c}_{t-1}, \tilde{l}_{t-1}, \tilde{w}_{t-1}]'$$

とすると次のように行列表現することができる。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_t(\theta) + \mathbf{B}_t \hat{\mathbf{s}}_t \quad (31)$$

これに、遷移方程式 (30)

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \Theta_1 \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \Theta_\varepsilon \varepsilon_t$$

を加えた方程式体系を状態空間モデルという。

さらに、状態空間モデルが定まると、DSGE モデルから導かれる観測方程式 \mathbf{y}_t から、モーメント理論値 ($\Gamma_{yy}^*(\theta) = E_\theta[\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t']$, $\Gamma_{xy}^*(\theta) = E_\theta[\mathbf{x}_t \mathbf{y}_t']$, $\Gamma_{yx}^*(\theta) = E_\theta[\mathbf{y}_t \mathbf{x}_t']$) を以下の式から逆算することができる。

$$E_\theta[\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t'] = \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_{ss} \mathbf{B}' \quad (32)$$

$$E_\theta[\mathbf{y}_t \mathbf{y}_{t-h}'] = \mathbf{B} \Theta_1^h \boldsymbol{\Omega}_{ss} \mathbf{B}' \quad (33)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Omega}_{ss} = E_\theta[\hat{\mathbf{s}}_t \hat{\mathbf{s}}_t']$ であり、以下の式より計算することができる。

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Omega}_{ss}) = [\mathbf{I} - \Theta_1 \otimes \Theta_1]^{-1} \text{vec}(\Theta_0 \Theta_0') \quad (34)$$

次節では、この DSGE モデルから逆算したモーメントの理論値を用いて DSGE-VAR の事前分布に DSGE モデルに基づく制約を設定する。

2.4 DSGE-VAR モデルによるベイズ分析

2.4.1 DSGE-VAR モデルとは

本稿では、DSGE モデルをベイズ推計する手段として DSGE-VAR を用いる。通常、ベイズ統計学の文脈においてはモデルの当てはまりを比較する方法としては周辺尤度が用いられることが多く、Smets and Wouters(2003)でも、VAR モデルと DSGE モデルの事後オッズ比（周辺尤度から計算される統計量）を比較することで、DSGE モデルが VAR モデルと遜色ないと結論付けている。しかし、この方法は事前分布の設定や、標本期間の設定の僅かな違いに強く左右されやすく、頑健性のある結果を提供しない。その例として、Del negro et al.(2007) は標本期間をわずか4年ずらして推計を行うことで、DSGE モデルと VAR モデルの周辺尤度の大小関係が逆転する例を挙げている。また、DSGE モデル全体は次数が無限大の VAR モデルとして表現されることから分かるように、DSGE モデルと VAR モデルは互いに入れ子構造になっていない。こうしたモデルを比較する場合、Smets and Wouters のように事後オッズ比を用いると、パラメーターの事前分布いかにによっては正しくないモデルが選択されるという「Lindley の逆説 (1957)」が生じることを、Sims(2003) が指摘している。

このような批判に応える形で Del Negro and Shorfheide(2004) や Del negro et al.(2007) により提案されたのが DSGE-VAR モデルである。DSGE-VAR モデルでは VAR のパラメーターを推定する際の事前分布として DSGE モデルによる制約を課す。DSGE の制約の大きさを表すパラメーターである λ を調整することによって最も周辺尤度が改善される値を（最適な $\lambda = \hat{\lambda}$ ）探し、DSGE モデルの評価を行うことができる。具体的には、もし制約を強くする（ $=\lambda$ の値を大きくする）につれて、推定されたモデルの周辺尤度の値が単調増加する（最適な $\lambda = \hat{\lambda}=\infty$ ）のであれば、DSGE モデルに全く定式化の誤り（misspecification）がないことを意味する。An and Schorfheide(2005) では、DSGE モデルからランダムに発生させた人工データを DSGE-VAR で推定することで、定式化の誤りが全くない場合は周辺尤度が λ の単調増加関数であることを実際に示している。逆に、制約を強くするにつれて周辺尤度が単調減少するのであれば、DSGE モデルは全く VAR の推定に有用な情報を含んでいないことになる（ $\hat{\lambda} = 0$ ）。実際の場合、DSGE モデルはその中間の有限値で最適な $\hat{\lambda}$ を達成することが多く、その際の $\hat{\lambda}$ の値をモデル間で比較することで、どのモデルがデータをより説明しているかを評価することができる。この $\hat{\lambda}$ の値を推定することが本稿の重要な課題の一つになるわけだが、Del Negro and Shorfheide(2004) や Del negro et al.(2007) では、この $\hat{\lambda}$ をグリッドサーチ法により求めている。しかし、本稿では Adjemian, Darracq and Moyen(2008) のように、 λ を一つのパラメーターとして扱い、その値を直接推定するというアプローチをとることにする。^{*3} DSGE-VAR はベイズの定理に基づき導出される。具体的には、VAR モデルから導かれる尤度に DSGE モデルから構成した事前分布をかけることで事後分布を導出する。しかし、事後分布の基準化定数が不明なため、事後分布からのサンプリングに

^{*3} DSGE-VAR モデルの理論および使用法について詳しく論じている文献に、Del Negro, Shorfheide, et al.(2007)、日本語の文献としては渡部 (2009)、藤原一平、渡部敏明 (2011) がある。

マルコフ連鎖モンテカルロ法という乱数発生手法を用いる。次節以降、その手順を詳述していく。

2.4.2 DSGE-VAR モデルの尤度関数

p 次のラグを持った unrestricted VAR を考える。

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t \quad (35)$$

ここで、 \mathbf{y}_t は n 個のマクロ経済変数、誤差項 \mathbf{u}_t は平均 0、分散 Σ_u の多変量正規分布に従うとする。 \mathbf{Y}_t を第 t 行が \mathbf{y}'_t の $T \times n$ 行列、また、 $k=1+np$ 、 \mathbf{X} を第 t 行が \mathbf{y}'_t の $T \times n$ 行列、 \mathbf{U}_t を第 t 行が \mathbf{u}'_t の $T \times n$ 行列、 Φ を $[\Phi_0, \dots, \Phi_p]'$ とする。以上の定式化に基づくと、上式は

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Phi + \mathbf{U} \quad (36)$$

と書き直すことができる。ここで、 \mathbf{u}_t が多変量正規分布に従うと仮定していることより、 \mathbf{U}_t は行列値正規分布 $MN(0, \Sigma \otimes I_T)$ に従う。その性質より尤度関数は Φ, Σ_u の関数として

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Y}|\Phi, \Sigma_u) &\propto |\Sigma|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma_u^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\Phi)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\Phi)]\right) \\ &\propto |\Sigma|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma_u^{-1}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \Phi'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\Phi + \Phi'\mathbf{X}'\mathbf{X}\Phi)]\right) \end{aligned} \quad (37)$$

とあらわすことができる。

2.4.3 DSGE-VAR モデルの事前分布の構成

DSGE-VAR では VAR モデルを推定する事前分布を DSGE モデルから構成する。VAR のパラメーター (Φ, Σ_u) 、DSGE モデルのパラメーター θ に同時事前分布 $p(\Phi, \Sigma_u, \theta)$ を設定する。そしてこの同時事前分布を

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta) = p(\Phi, \Sigma_u|\theta)p(\theta) \quad (38)$$

と分解する。式 (38) の形から階層事前分布の形になっており、VAR モデルの事前分布 Φ, Σ_u が DSGE モデルのパラメーター θ に依存していることが分かる。すなわち、 θ は Φ, Σ_u にとってのハイパー・パラメーターである。ここで、DSGE モデルからサンプル数 $T^* = (\lambda T)$ の人工データ $\mathbf{Y}^*(\theta)$ を発生させ、そのデータが前節の VAR モデルに従うとすると、そのデータに条件付けられる VAR のパラメーターの分布は $p(\Phi, \Sigma_u|\mathbf{Y}^*(\theta))$ になるが、 $\mathbf{Y}^*(\theta)$ は DSGE モデルのパラメーターに依存していることから、これを $p(\Phi, \Sigma_u|\theta)$ として考えることができる。計算にはベイズの定理を使う。

$$p(\Phi, \Sigma_u|\theta) \propto p(\mathbf{Y}^*(\theta)|\Phi, \Sigma_u)p(\Phi, \Sigma_u) \quad (39)$$

(39) 式の左辺第一項は VAR モデルの尤度関数なので、パラメーター θ の DSGE モデルから発生させた人工データの組を $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ とすると、(37) は

$$L(\mathbf{Y}^*(\theta)|\Phi, \Sigma_u) \propto |\Sigma_u|^{-\frac{T^*}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma_u^{-1}(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\Phi)'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\Phi)]\right) \quad (40)$$

となる。ここで、上式の OLS 推定量を $\hat{\Phi} = (\mathbf{X}^*{}'\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^*{}'\mathbf{Y}^*$ とすると、指数関数内は、OLS 推定量の性質を利用して

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi})'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi}) &= (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi})'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi}) + (\hat{\Phi} - \hat{\Phi})'\mathbf{X}^*{}'\mathbf{X}^*(\hat{\Phi} - \hat{\Phi}) \\ &= \mathbf{Y}^*{}'\mathbf{Y}^* - \mathbf{Y}^*{}'\mathbf{X}^*(\mathbf{X}^*{}'\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^*{}'\mathbf{Y}^* \\ &\quad + (\hat{\Phi} - \hat{\Phi})'\mathbf{X}^*{}'\mathbf{X}^*(\hat{\Phi} - \hat{\Phi}) \end{aligned} \quad (41)$$

と書き換えることができる。^{*4}ここで人工データの組 $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ は確率的に変動するが、その二次モーメントの組 $(\mathbf{Y}^*{}'\mathbf{Y}^*, \mathbf{Y}^*{}'\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*{}'\mathbf{X}^*)$ を 2.3 節で導出したモデルから得られる理論値である $(\lambda T\mathbf{\Gamma}_{yy}^*(\theta), \lambda T\mathbf{\Gamma}_{yx}^*(\theta), \lambda T\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta))$ に置き換える。ここで、例えば $\mathbf{\Gamma}_{yy}^*(\theta) = E_{\theta}[\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t']$ であり、これにデータの数 λT をかけて実際のデータから得られるモーメントとの相対的な大きさの比率を調節している。よって、実際に DSGE モデルからデータを発生させるわけではない。この理論値は DSGE モデルのパラメーター θ を与えるとその関数として一意に決定される。この二次モーメントを用いて、

$$\Phi^*(\theta) = \mathbf{\Gamma}_{xx}^{*-1}(\theta)\mathbf{\Gamma}_{xy}^*(\theta) \quad (42)$$

$$\Sigma_u^*(\theta) = \mathbf{\Gamma}_{yy}^*(\theta) - \mathbf{\Gamma}_{yx}^*(\theta)\mathbf{\Gamma}_{xx}^{*-1}(\theta)\mathbf{\Gamma}_{xy}^*(\theta) \quad (43)$$

と定義すると、(41) 式は

$$\lambda T\Sigma_u^*(\theta) + (\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta))'\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta)(\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta)) \quad (44)$$

と書き換えられる。次に、(39) 式の右辺第二項の事前分布を無情報非正則事前分布 $p(\Phi, \Sigma_u) \propto |\Sigma_u|^{-\frac{(n+1)}{2}}$ とするとよく知られた正規-逆ウィシャート型 (inverseted-Wishart-Normal)^{*5} の事前分布が以下のように導出される。

$$\begin{aligned} p(\Phi, \Sigma_u|\theta) &= c^{-1}|\Sigma_u|^{-\frac{(\lambda T+n+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}tr[\lambda T\Sigma_u^{-1}(\Sigma_u^*(\theta) + (\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta))'\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta)(\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta)))]\right) \\ &= c^{-1}|\Sigma_u|^{-\frac{(\lambda T+n+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}tr[\lambda T\Sigma_u^{-1}\Sigma_u^*(\theta)]\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}tr[\lambda T\Sigma_u^{-1}(\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta))'\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta)(\hat{\Phi} - \Phi^*(\theta))]\right) \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、 λ の値は逆ウィシャート分布が平均を持つための条件 $T\lambda \geq k + n$ を満たすとし、更に $\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta)$ の逆行列が存在すれば、基準化定数 c は以下のように解析的に計算できる。

$$\begin{aligned} c &= (2\pi)^{nk/2}|\lambda T\mathbf{\Gamma}_{xx}^*(\theta)|^{-n/2}|\lambda T\Sigma_u^*(\theta)|^{-(\lambda T-k)/2} \\ &\quad \times 2^{-n(\lambda T-k)/2}\pi^{n(n-1)/4} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda T - k + 1 - i)/2] \end{aligned} \quad (46)$$

^{*4} 通常は $(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi})'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\Phi})$ で計算をやめる場合が多いが、ここでは後に二次モーメントの理論値に置き換える便宜上、この形に変形している。

^{*5} 正規-逆ウィシャート型 (inverseted-Wishart-Normal) 確率分布の詳しい性質についてはゼルナー (1986)、繁樹 (1985) 等を参照されたい。

ここで、 $\Gamma[\cdot]$ はガンマ関数を表す。 Σ_u, Φ の条件付き分布は、正規-逆ウィシャート型事前分布の性質より

$$\Sigma_u | \theta \sim \mathcal{IW}(\lambda T \Sigma_u^*(\theta), \lambda T - k, n) \quad (47)$$

$$\Phi | \Sigma_u, \theta \sim \mathcal{N}(\Phi^*(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta))^{-1}) \quad (48)$$

になる。

2.4.4 DSGE-VAR モデルの事後分布

ベイズの定理より、前節で導出した事前分布に尤度を掛け合わせることで VAR のパラメーターと DSGE モデルのパラメーター θ の同時事後分布が導出される。さらに、同時事後分布を以下のように分解する。

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta | \mathbf{Y}) = p(\Phi, \Sigma_u | \mathbf{Y}, \theta) p(\theta | \mathbf{Y}) \quad (49)$$

同時事後分布を分解した右辺第一項は、共役分布の性質から再び正規-逆ウィシャート型の確率分布になる。

$$\Sigma_u | \mathbf{Y}, \theta \sim \mathcal{IW}(\lambda T \tilde{\Sigma}_u(\theta), (1 + \lambda)T - k, n) \quad (50)$$

$$\Phi | \Sigma_u, \theta \sim \mathcal{N}(\tilde{\Phi}(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) \quad (51)$$

ここで、

$$\tilde{\Phi}(\theta) = (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^* + \mathbf{X}'\mathbf{Y}) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_u(\theta) = & \frac{1}{(\lambda + 1)T} \left[(\lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta) + \mathbf{Y}'\mathbf{Y}) \right. \\ & \left. - (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + \mathbf{Y}'\mathbf{X})(\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{Y}) \right] \end{aligned} \quad (53)$$

である。なお、詳しい式展開はゼルナー (1986) に詳しい。

逆ウィシャート分布、多変量正規分布からは容易にサンプリングが可能であるので、(49) 式第二項の DSGE モデルのパラメーター θ に関する周辺事後分布 $p(\theta | \mathbf{Y})$ から θ がサンプリングができれば、それを条件として条件付き逆ウィシャート分布 $\Sigma_u | \mathbf{Y}, \theta$ から Σ_u をサンプリングし、さらに Σ_u, θ を条件として $\Phi | \Sigma_u, \theta$ からサンプリングすることができる。ベイズの定理より

$$p(\theta | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \theta) p(\theta) \quad (54)$$

である。このうち、尤度関数 $p(\mathbf{Y} | \theta)$ は以下の式より解析的に計算することができる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y} | \theta) &= \frac{p(\mathbf{Y} | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta)}{p(\Phi, \Sigma_u | \mathbf{Y})} \\ &= \frac{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X}|^{-n/2} |(\lambda + 1)T \tilde{\Sigma}_u(\theta)|^{(\lambda + 1)T - k/2}}{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)|^{-n/2} |\lambda T \Gamma_u^*(\theta)|^{(\lambda T - k)/2}} \\ &\quad \times \frac{(2\pi)^{nT/2} 2^{n((\lambda + 1)T - k)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda + 1)T - k + 1 - i]/2]}{2^{n(\lambda T - k)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda T - k + 1 - i)/2]} \end{aligned} \quad (55)$$

$p(\theta)$ とは DSGE モデルのパラメーターの事前分布であり、そのパラメーターの経済学上の特性や、先行研究等で明らかになっている値をもとに設定する。詳細な設定は次章で行う。

2.4.5 マルコフ連鎖モンテカルロ法による乱数発生

DSGE モデルのパラメーター θ に関する周辺事後分布 $p(\theta|Y)$ を求めるには、その規格化定数

$$\int p(\mathbf{Y}|\theta)p(\theta)$$

を計算する必要があるが、これを解析的に求めることはできない。そこで、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) により周辺事後分布 (54) から直接サンプリングを行う。MCMC とは一回前にサンプリングした値に依存させて次のサンプリングを行う手法の総称である。先行研究の Del Negro and Shorfheide(2004) では事後分布 $p(\theta|\mathbf{Y})$ からのサンプリングに、ランダムウォーク・メトロポリスヘイスティングス・アルゴリズム (MH アルゴリズム) を用いており、本稿もそれに従うことにする。

— MH アルゴリズム —

1. $p(\mathbf{Y}|\theta)p(\theta)$ のモード θ^* を求め、 $p(\mathbf{Y}|\theta)p(\theta)$ の Hessian の逆行列にマイナスをつけたものを θ^* で評価し、それを Σ^* とする。

$$\Sigma^* = -\left[\frac{\partial^2 p(\mathbf{Y}|\theta)p(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta=\theta^*}\right]^{-1}$$

2. 初期値を $\theta^0 = \theta^*$ とし、 $s=1$ とする。その後、以下の手順に沿ってサンプリングを行う。
3. 多変量正規分布 $\mathcal{N}(\theta^{s-1}, c^2\Sigma^*)$ からパラメーターの候補 $\theta^{proposal}$ をサンプリングする。なお、 c は調整係数である。
4. θ^{s-1} と 3 でサンプリングされた $\theta^{proposal}$ を用いて、以下の式から受容確率 q を計算する。

$$q = \min\left[\frac{p(\mathbf{Y}|\theta^{proposal})p(\theta^{proposal})}{p(\mathbf{Y}|\theta^{s-1})p(\theta^{s-1})}\right]$$

5. $\theta^{proposal}$ を確率 q で受容し、確率 $1-q$ で棄却する。受容された場合は $\theta^s = \theta^{proposal}$ とし、受容されなかった場合は $\theta^s = \theta^{s-1}$ とする。
6. $s=s+1$ として 3 に戻る。 $s=N$ となった場合、終了する。

こうしてサンプリングした列 $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N)$ は $N \rightarrow \infty$ とすると事後分布 $p(\theta|\mathbf{Y})$ からサンプリングしたものに確率収束する。そこで、十分大きな N をとれば、それを事後分布からサンプリングした乱数列とみなすことができる。ただし、最初の方にサンプリングされた乱数列は、初期値の影響を大きく受けるので推定に用いるべきではないと考えられるので、最初の一定期間をバーン・イン (burn-in) として捨て残りを事後分布からの乱数列として採用する。

3 DSGE-VAR モデルによる確率的トレンドの評価

本章では、前章において導出した DSGE モデルを DSGE-VAR モデルを用いてベイズ推計を行うことで、確率的トレンドモデルの日本のデータへの当てはまりを評価する。確率的トレンドモデルに対し、決定的トレンドを持つモデルを比較のために用いる。分析の結果、確率的トレンドモデルの方が、定式化の誤りが総じて少ないことが明らかになった。また、一時的な生産性の上昇に対して、両モデルの DSGE モデル、DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答関数を比較したところ、確率的トレンドモデルは、労働時間の波及経路の改善を通じてデータへの当てはまりを向上させている可能性が示唆された。

3.1 確率的トレンドモデルと決定的トレンドモデルの違い

本節では前章までに導出した DSGE モデル、および DSGE-VAR モデルを使いパラメータのベイズ推計を行う。なお、本稿の分析では確率的トレンドモデル及び決定的トレンドモデルを比較するが、前章で導出した確率的トレンドモデルとの違いは以下のようになる。

$$\begin{aligned}\log Z_t &= \log z + \log Z_{t-1} + z_t^z \\ \Rightarrow \log Z_t &= \log z + \log Z_{t-1}\end{aligned}$$

この変更により、モデルにおける技術進歩率は一定になる。しかし、技術進歩へのショックはマクロ経済分析において重要なファクターであるので、Smets and Wouters(2007)に見られるような典型的な全要素生産性へのショックを生産関数に以下のように追加する。すると、中間財企業における生産関数は以下のように変更される。

$$\begin{aligned}Y_t(f) &= (Z_t l_t(f))^{1-\alpha} (u_t K_{t-1}(f))^\alpha - \Phi Z_t \\ \Rightarrow Y_t(f) &= e^{z_t^a} (Z_t l_t(f))^{1-\alpha} (u_t K_{t-1}(f))^\alpha - \Phi Z_t\end{aligned}$$

また、潜在生産量も同様に変更される。

$$\begin{aligned}Y_t^* &= (Z_t l)^{1-\alpha} (u k Z_{t-1})^\alpha - \Phi Z_t \\ \Rightarrow Y_t^* &= e^{z_t^a} (Z_t l)^{1-\alpha} (u k Z_{t-1})^\alpha - \Phi Z_t\end{aligned}$$

以上の2つのモデル「確率的トレンドモデル」、「決定的トレンドモデル」を DSGE-VAR の枠組みを用いて構造パラメータ及び λ の値をベイズ推計する。

3.2 データ

廣瀬 (2012) に従い、実質 GDP 成長率、実質消費成長率、実質設備投資成長率、実質賃金成長率、労働時間、物価上昇率、名目短期金利の 7 系列を用いる。推定期間は 1981 年第 1 四半期か

ら 2010 年第 3 四半期である。渡部（2009）等の DSGE-VAR を用いた先行研究においては、モデルが想定するテイラー型の金融政策ルールに従っていないとしてゼロ金利期間を排除する場合が多い。しかし、Hirose and Kurozumi(2012) で示されているようにゼロ金利期間を含めて推定を行ったとしても、ゼロ金利期間を含めずに推定を行った場合と比較して、結果の違いが小さいことが確認されていることから、本稿ではゼロ金利期間のサンプルを含むデータを用いて推計を行うことにする。

実質 GDP、実質消費、実質設備投資に関するデータは内閣府の国民経済計算よりそれぞれの名目値を、総務省の消費者物価指数で割り込むことで実質化している。このような実質化された系列を総務省の労働力調査の 15 歳以上の人口で除することで、一人あたりの数字に変換している。実質賃金は、厚生労働省の毎月勤労統計から毎月定期給与 ÷ (総労働時間 ÷ 出勤日数) によって時間当たりのデータを作成した上で、消費者物価指数で割り込むことで実質化している。労働時間は、毎月労働党系から総労働時間 ÷ 出勤日数を使用し、推定期間における平均からの乖離率を求めた。物価上昇率については、前述の消費者物価指数を使用している。名目短期金利に関しては、1985 年 6 月以前は有担保コールレートの翌日物、1985 年 7 月以降は無担保コールレートのオーバーナイト物を使用している。データは四半期ベースで、名目短期金利以外は季節調整済みの系列を用いた。

3.3 DSGE モデルのパラメーター θ の事前分布

前章で示した通り、

$$p(\theta|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\theta)p(\theta)$$

でありこのうち、尤度関数 $p(\mathbf{Y}|\theta)$ は解析的に計算することができる。 $p(\theta)$ とは DSGE モデルのパラメーターの事前分布であり、そのパラメーターの経済学上の特性や、先行研究等で明らかになっている値をもとに設定する。例えば、各ショックの持続度合いは AR(1) に従うと想定しているため、定常性を保つためにはパラメーターは 0 から 1 まででなければならない。この場合、定義域が 0 から 1 であるベータ分布を事前分布として用いる。また、いくつかのパラメーターは先行研究である Sugo Ueda(2008) をもとに値を固定している。具体的には、 $\delta = 0.04/4, \alpha = 0, 37, \lambda_w = 0.20$ とした。また、GDP と政府支出の比の定常状態である g/y はデータの平均値である 0.31 に固定した。以下が推定するパラメーターの事前分布及びその平均、分散の値である。

表 1 事前分布

パラメーター名	意味	範囲	分布名	事前平均	標準偏差
σ	相対的リスク回避度	[0 ∞]	Gamma	1	0.375
θ	消費の習慣形成の度合い	[0 1]	beta	0.7	0.150
χ	労働供給の弾力性の逆数	[0 ∞]	Gamma	2	0.750
$1/\zeta$	投資の調整費用の係数	[0 ∞]	Gamma	4	1.500
μ	稼働率の定常値	[0 ∞]	Gamma	1	1.000
ϕ	生産における固定費割合	[0 ∞]	Gamma	0.075	0.013
γ_w	賃金のインフレ率依存度	[0 1]	Beta	0.5	0.250
ξ_w	賃金改定の割合	[0 1]	Beta	0.375	0.100
γ_p	物価のインフレ率依存度	[0 1]	Beta	0.5	0.250
ξ_p	価格改定の割合	[0 1]	Beta	0.375	0.100
λ_p	物価のマークアップ率	[0 ∞]	Gamma	0.15	0.050
z^*	z の定常値	[0 ∞]	Gamma	0.19	0.050
l^*	l の定常値	[$-\infty$ ∞]	normal	0	0.050
π^*	π の定常値	[0 ∞]	Gamma	0.175	0.050
r^*	r の定常値	[0 ∞]	Gamma	0.498	0.050
ϕ_r	名目金利の平準化の度合い	[0 1]	Beta	0.8	0.100
ϕ_π	名目金利のインフレ率への反応	[0 ∞]	Gamma	1.7	0.100
ϕ_y	名目金利の GDP ギャップへの反応	[0 ∞]	Gamma	0.125	0.050
ρ_x	各ショックの持続性	[0 1]	Beta	0.5	0.200
σ_x	各ショックの標準偏差	[0 ∞]	InverseGamma	0.5	∞

3.4 事後分布の推計結果

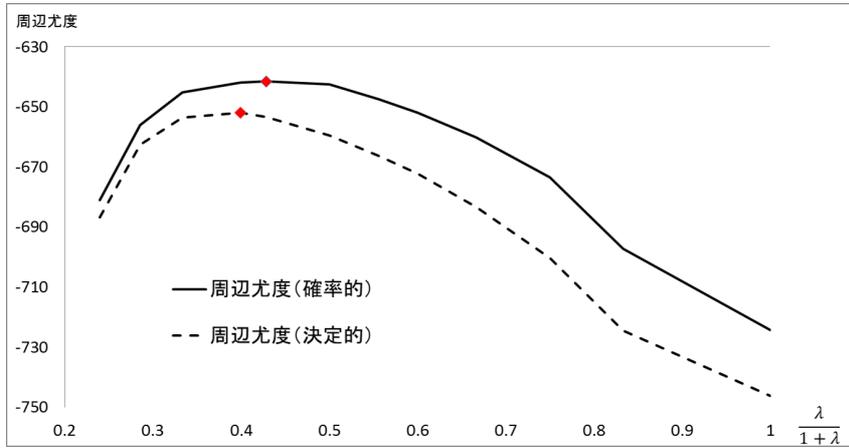
表 2 の推計結果をみると、 ρ_z の値は 0,08 と非常に小さい値をとっているのに対し、 ρ_a の値は 0.88 と大きな値をとっている。これは両ショックの性質の違いによるものと考えられる。すなわち、 e_z は非定常、すなわちトレンドに対する恒久的なショックであるため、係数が小さくてもショックは経済にとどまり続ける。しかし、 e_a は AR(1) に従う定常ショックであるため、現実でショックが一定期間残留するという特性を反映して、その係数である ρ_a の係数の値が比較的大きな値をとったと考えられる。さて、表 2 より、確率的モデルの最適な λ は 0.755、一方、決定的モデルの最適な λ の値は 0.644 であることが読み取れる。前者の λ の値が大きいことは、定式化の誤りの度合いが後者よりも小さいことを意味している。すなわち生産性へのショックは非定常な確率過程としてモデリングした方がモデルのデータへの当てはまりを改善できることが確認された。また、最適な λ における対数周辺尤度の値も、確率的トレンドモデルの方が高いことが分かる。

表 2 推計結果

パラメーター名	事前平均	確率的トレンドモデル		決定的トレンドモデル	
		事後平均	95%信用区間	事後平均	95%信用区間
σ	1	0.908	[0.486 1.331]	1.173	[0.642 1.720]
θ	0.7	0.727	[0.614 0.845]	0.480	[0.210 0.760]
χ	2	3.389	[2.025 4.704]	2.991	[1.671 4.331]
$1/\zeta$	4	5.068	[2.479 7.564]	6.263	[3.219 9.335]
μ	1	4.550	[2.382 6.748]	5.726	[2.858 8.661]
ϕ	0.075	0.071	[0.052 0.090]	0.083	[0.059 0.104]
γ_w	0.5	0.302	[0.006 0.569]	0.356	[0.022 0.674]
ξ_w	0.375	0.560	[0.444 0.675]	0.421	[0.294 0.552]
γ_p	0.5	0.290	[0.014 0.551]	0.379	[0.029 0.708]
ξ_p	0.375	0.770	[0.683 0.857]	0.634	[0.502 0.762]
λ_p	0.15	0.412	[0.248 0.571]	0.361	[0.213 0.513]
z^*	0.19	0.147	[0.089 0.202]	0.151	[0.097 0.203]
l^*	0	0.001	[-0.078 0.083]	-0.001	[-0.082 0.082]
π^*	0.175	0.161	[0.098 0.225]	0.165	[0.097 0.234]
r^*	0.498	0.530	[0.451 0.607]	0.527	[0.451 0.605]
ϕ_r	0.8	0.745	[0.672 0.824]	0.700	[0.615 0.784]
ϕ_π	1.7	1.636	[1.476 1.791]	1.734	[1.569 1.896]
ϕ_y	0.125	0.227	[0.128 0.321]	0.258	[0.134 0.379]
ρ_b	0.5	0.276	[0.075 0.484]	0.505	[0.190 0.841]
ρ_i	0.5	0.360	[0.204 0.512]	0.253	[0.093 0.400]
ρ_g	0.5	0.880	[0.770 0.982]	0.925	[0.867 0.982]
ρ_w	0.5	0.142	[0.024 0.256]	0.155	[0.027 0.275]
ρ_p	0.5	0.335	[0.111 0.554]	0.376	[0.113 0.628]
ρ_r	0.5	0.355	[0.180 0.535]	0.369	[0.176 0.558]
γ_b	0.5	1.611	[0.815 2.376]	1.218	[0.577 1.858]
γ_i	0.5	2.115	[1.575 2.624]	1.950	[1.481 2.382]
γ_g	0.5	0.967	[0.755 1.179]	1.159	[0.907 1.399]
γ_w	0.5	0.334	[0.257 0.414]	0.371	[0.278 0.463]
γ_p	0.5	0.170	[0.120 0.217]	0.208	[0.134 0.280]
γ_r	0.5	0.079	[0.067 0.090]	0.078	[0.066 0.089]
γ_z/γ_a	0.5	1.106	[0.876 1.339]	0.337	[0.256 0.415]
ρ_z/ρ_a	0.5	0.080	[0.014 0.142]	0.882	[0.778 0.991]
λ_*	1	0.755	[0.594 0.912]	0.644	[0.523 0.758]
周辺尤度		-641.566		-652.933	

また、それ以外の λ の値を与え、 $\lambda/(1+\lambda)$ と周辺尤度の値をプロットしたものが図 1 である。図 1 より、まず、 λ の値と周辺尤度のグラフは最適な $\hat{\lambda}$ の値を頂点として、逆 U 字型になっていることが分かる。このことは、本稿で用いた DSGE モデルに定式化の誤りはあるものの、VAR を推定する上で DSGE モデルが有益な情報をもたらしていることを意味している。このような結果は Del negro et al.(2007) や渡辺 (2009) といった先行研究とも整合的な結果である。さらに、全ての λ の値において一様に確率的モデルの周辺尤度の値が一様に高いことから、確率的トレンドを導入した場合の方が日本のデータによくフィットしていることが確認できる。

図1 λ と対数周辺尤度の関係



3.5 ベイジアン・インパルス応答関数の比較

DSGE-VAR($\hat{\lambda}$) は、周辺尤度を最大にする $\hat{\lambda}$ を推定に用いた場合の VAR モデルであり、DSGE モデルに比べてもデータの説明力が高い。そのため、DSGE-VAR($\hat{\lambda}$) のベイジアン・インパルス応答関数はデータの生の特性をより反映したものであるといえ、それをベンチマークとして DSGE モデルのベイジアン・インパルス応答関数と比較することで、定式化の誤りが具体的にどの波及経路に生じているかという洞察を得ることが可能になる。前節において、確率的トレンドモデルの方が決定的トレンドモデルよりもデータの説明力が高いと判定されたことから、前者のインパルス応答の方が、DSGE-VAR($\hat{\lambda}$) モデルのそれに近い軌道を描くことが期待される。両モデルの相違点は、トレンドのみであるから、ここでは違いを特徴付けているそれぞれのモデルに特有のショック z_t^z 、 z_t^a についてのインパルス応答を DSGE モデルと DSGE-VAR($\hat{\lambda}$) についてそれぞれ発生させ、比較を行っていく。

なお、DSGE-VAR モデルの枠組みでは、VAR に関する構造ショックを識別することが可能である。よく知られているように、一期先予測誤差は構造ショックの関数として以下のように分解できる。

$$u_t = \Sigma_{tr} \Omega \epsilon_t$$

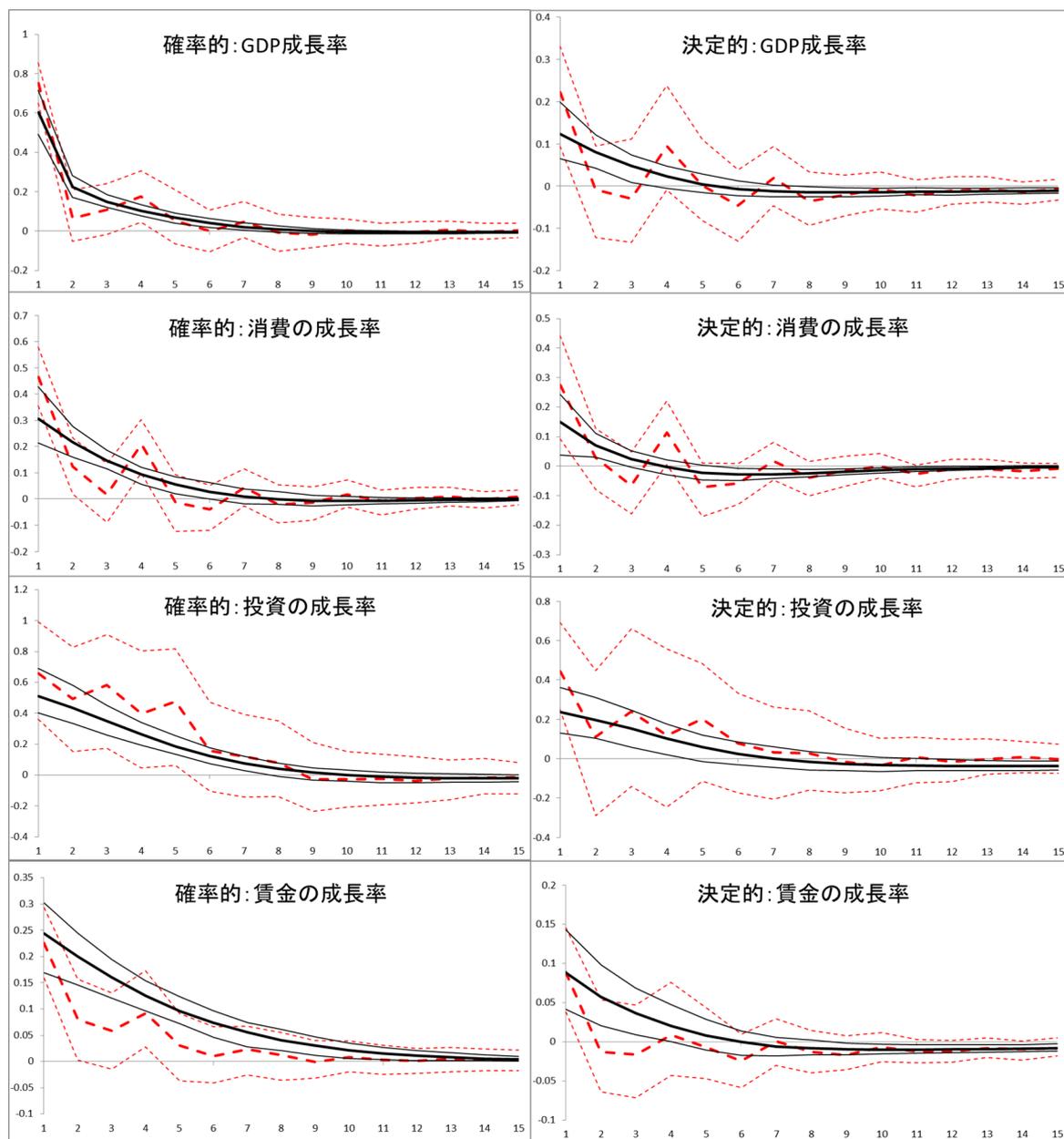
ここで、 Σ_{tr} は Σ_u をコレスキー分解した対角行列で、 Ω は直行行列である。つまり、構造ショック ϵ の y_t に対する初期のインパルス応答は以下のように決定されることになる。

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial u_t} \right) = \Sigma_{tr} \Omega$$

識別の問題は、データが Ω の決定に何の情報ももたらさないことから生じる。これは $\Sigma_{tr} \Omega \Omega' \Sigma_{tr}' = \Sigma_u$ であるため、尤度関数は Ω について不変であるからである。この問題を解決するため、共分散行列 Σ_u の三角化を維持したまま、DSGE-VAR における Ω を DSGE モデルにより一意に決まる $\Omega(\theta)$ に置き換える。これにより、サンプリングされた各 θ について、

DSGE-VAR のインパルス応答が一意に決定されることになる。以下の図は、以上の方法で計算された DSGE-VAR($\hat{\lambda}$) モデルのインパルス応答関数と、DSGE モデルのインパルス応答関数を計算したものである。なお、太実線及び細実線は、DSGE モデルのベイジアン・インパルス応答関数の中央値、及び 90 % HPD 区間の下限と上限を表している。また同様に、太破線及び細破線は DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答関数の中央値、及び 90 % HPD 区間の上限と下限を表している。

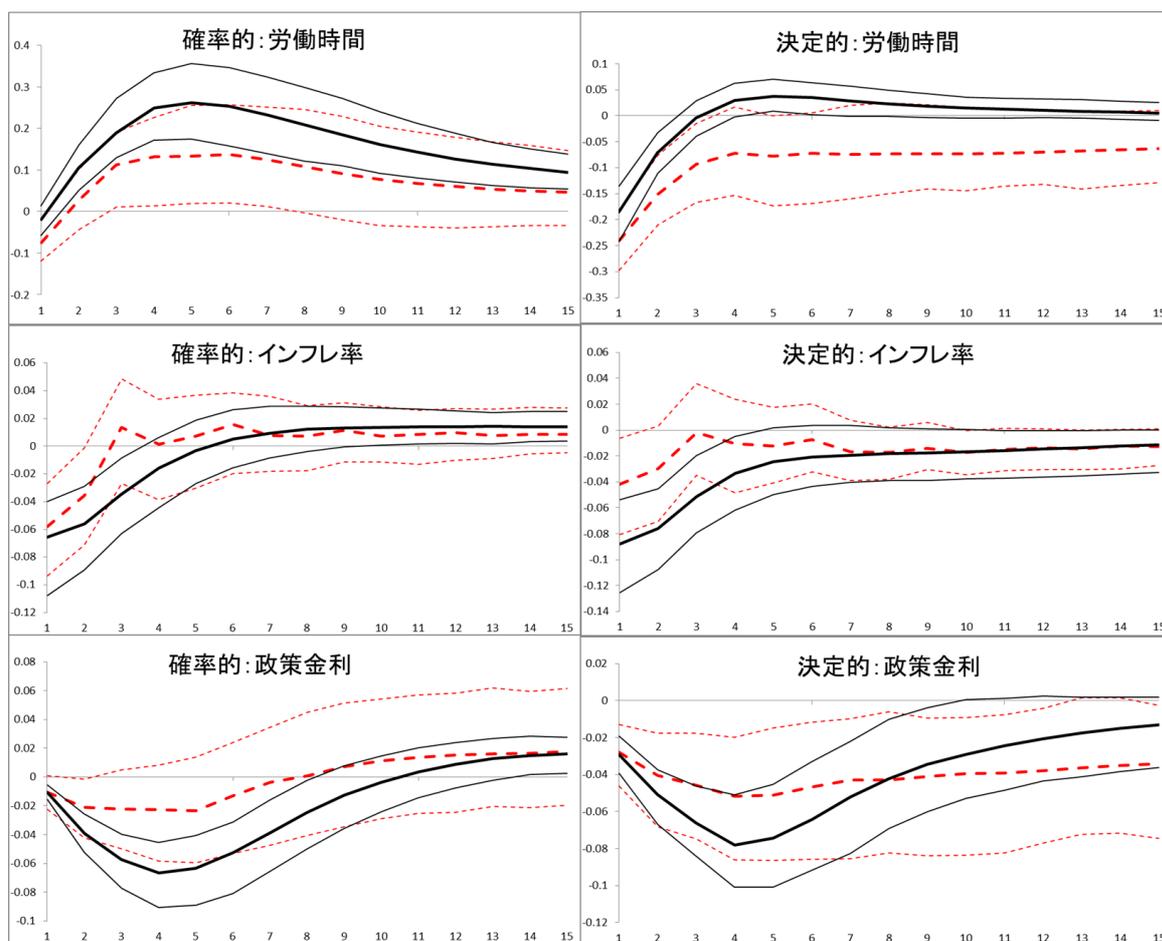
図2 ベイジアン・インパルス応答 1



dY,dC,dI,dW の実体変数に関しては dY や dI において、決定的トレンドモデルにおける技術

ショックに対する DSGE-VAR のベイジアン・インパルス応答の 90 % HPD 区間が確率的トレンドモデルのそれより大きいといった違いはあるものの、それぞれの DSGE モデル、DSGE-VAR モデルのインパルス応答の反応の方向や持続時間は似ている上、おおむね DSGE モデルのインパルスの中央値は DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答の 90 % HPD 区間に入っているため、これらの変数の定式化の誤りは総じて小さいと考えることができるだろう。

図3 ベイジアン・インパルス応答2



インフレ率、名目利子率に関しても両者とも DSGE モデルのインパルス応答の中央値が DSGE-VAR モデルの 90 % HPD 区間におおむね含まれているため、定式化の誤りの程度は、両モデルで大きな差はないといえる。一方、注目すべき変数は労働時間 l_t である。まず、確率的トレンドモデルにおける技術進歩率へのショックに対しての労働時間 l_t の反応を見ると、DSGE モデル、DSGE-VAR モデル共に一時的な負のショックの後大きく正の値をとり、時間をかけて減衰している。途中、DSGE モデルのインパルス応答の中央値が DSGE-VAR モデルの 90 % HPD 区間外に出ることもあるが、これはわずかな期間にとどまっている。よって、確率的トレンドモデルの時

は、労働時間 l_t のインパルス応答に関して、大きな定式化の誤りがあるとは言えない。しかし、決定的トレンドモデルにおいて、DSGE モデルは負のショックを経験した後正のショックに転じているのに対し、DSGE-VAR モデルでは全期間で負の値をとり続けている。その結果、多くの期間において、DSGE モデルのインパルス応答の中央値が DSGE-VAR モデルの 90 % HPD 区間外のパスを描いている。これは、決定的トレンドモデルの労働時間の技術ショックへの反応に定式化の誤りが相対的に大きいことを意味している。以上の事実より、前節で確認した決定的トレンドモデルの方が確率的トレンドモデルより定式化の誤りが大きいという事実は、労働時間 l_t の波及経路における定式化の誤りがその一因になっていることが確認できた。

3.6 結果の解釈

このように、確率的モデルの労働時間のインパルス応答の方が、相対的に正の値をとっている割合が大きいという結果は、両モデル共に生産関数に付随する生産性ショックが異なるという点以外、全く同様の経済行動を仮定していることから、労働時間 l_t の波及経路の違いは両モデルの違いである生産関数及び生産性ショック部分のモデル化の違いに起因するものだと考えられる。その原因を特定化するため、モデル内の生産性ショックの波及経路を確認しよう。確率的トレンドの生産関数を定常値周りで対数線形近似すると

$$\tilde{y}_t = (1 + \phi) \left\{ (1 - \alpha) \tilde{l}_t + \alpha \left(\tilde{u}_t + \tilde{k}_{t-1} - z_t^z \right) \right\}$$

となる。すなわち、確率的トレンドの場合は、生産性の上昇は、生産関数の右辺に対する負のショック、すなわち労働時間 l_t に対しては正のショックとして作用することが分かる。これは、共通のトレンドを持つ Y_t 、 $Z_t l_t$ 、 ΦZ_t がショックに応じて同一のタイミングで、一様の割合でその伸び率が上昇するのに対し、 K_{t-1} は期初に決まる変数であるので、生産性の上昇が反映されるタイミングが遅れ、それを補うために一時的に労働供給が増加することを意味している。

一方、決定的トレンドの生産関数を定常値周りで対数線形近似したものは

$$\tilde{y}_t = (1 + \phi) \left\{ (1 - \alpha) \tilde{l}_t + \alpha \left(\tilde{u}_t + \tilde{k}_{t-1} \right) + z_t^a \right\}$$

であり、対数線形近似後の式を見ると、生産関数の右辺に正のショック、すなわち、労働時間 l_t に対しては負のショックとして作用することが分かる。これは以下のように解釈できる。モデル内の消費や投資は慣性を持っているため、生産性が増加したからといってすぐに同量だけ需要が増加する訳ではない。そのため、生産性の上昇は一時的に労働時間を押し下げる方向に作用する。このように、生産関数に付随するショックの違いによって、労働時間に与える初期のショックの方向が異なり、結果として以上のような波及経路の違いをもたらしたのだと考えられる。以上の結果をまとめると、トレンドを導入したモデルでは、確率的トレンドの方が、決定的トレンド（と通常の TFP ショック）を仮定した場合に比べて定式化の誤りの程度は改善される。またそれは、生産性ショックに対する労働時間の波及経路を改善していることがその一因となっていることが確認できたといえる。

この結果の持つ意味を、生産性ショックと労働時間の関係に関する現在に至るまでの研究を踏まえたい。一般に、通常の RBC モデルでは正の生産性ショックに対し、労働時間は正に反応することが知られている。しかし、このようなモデルの結論に対し、Gal(1999) は構造形 VAR モデルを使い、独占的競争と粘着価格の仮定下では、生産性ショックと労働時間は負の相関を持つことを示した。さらに、別の構造形 VAR を用いた Francis and Ramey(2005) や決定的トレンドを持つ DSGE モデルをベイズ推計した Smets and Wouters(2007) も同様に、生産性ショックに対し労働時間は負に反応するとの結論を示している。一方、Christiano, Eichenbaum, and Vigfusson(2003) は全く逆の結果を提示しており、負の相関を持つというこれまでの実証結果は、モデルの定式化の誤りに起因しているという見解を示した。実際に、Gal(1999) らの構造形 VAR の制約をわずかに変更することで負の相関を再現することが可能であることが知られている。

このように、生産性ショックと労働時間の関係については多くの議論があり、生産性ショックに対する労働時間の反応の方向が正なのか負なのかという点について、未だ統一的な見解には至っていないのが現状である。その中で、本稿の結果は、生産性ショックは労働時間に対し正の影響を与えるという結果を支持するものとして考えることができる。また、本稿で用いている「決定的トレンドモデル」における生産性ショックの定式化は Smets and Wouters(2007) のものと同一のものである。そのため、Smets and Wouters(2007) にみられる正の生産性ショックが労働時間を減少させるという現象は、生産性ショックに関する定式化の誤りに起因するものであると結論付けることができ、この点からも本稿は上記の議論に貢献しているといえるだろう。

3.7 結果の頑健性

本稿の最後に、本稿の結果の頑健性についての議論を行っておく。本稿では先行研究の Hirose and Kurozumi(2012) に従い、ゼロ金利期間を含む日本のデータを用いて推計を行った。Hirose and Kurozumi(2012) では、ゼロ金利期間は引き締め的な金融政策ショックが発生していると解釈できること、またビジネスサイクルの要因分解の結果に関し、ゼロ金利期間を含めて推定を行ったとしても、ゼロ金利期間を含めない場合と比較して結果の違いが小さいということを根拠にゼロ金利期間を含めて推計を行っている。しかし、他の日本の先行研究のほとんどはゼロ金利期間を除いたデータを用いて推計を行っていることから、本節では 1998 年第 3 四半期以前のデータを用いて同一の推計を行い、本稿の結果が再現されるかを確認した。以下の表は、ゼロ金利期間を含めずに確率、決定的の両モデルを同様の手順で推計し、周辺尤度を最大にする λ^* の値と周辺尤度の値をまとめたものである。

表 3 ゼロ金利期間を含めなかった場合の λ^* と周辺尤度の値

	事後平均	95 %信用区間	周辺尤度
確率的モデルの λ^*	1.444	[1.087 1.776]	-410.568
決定的モデルの λ^*	1.387	[1.097 1.728]	-416.156

以上の結果より、ゼロ金利期間を含めなかった場合においても、最適な λ^* の値は確率的モデルの方が高く、周辺尤度の値も大きいことが確認された。しかし、全期間を含めて推計した場合において、最適な λ^* の値が（確率的モデル：0.755、決定的モデル：0.644）であるのに対して両者とも（確率的モデル：1.444、決定的モデル：1.387）と大きく値が上昇していることが分かる。 λ の値は、DSGE モデルの制約の強さを表し、この値が大きいほど定式化の誤りの程度が小さいことを思い出すと、ゼロ金利期間を含めて DSGE モデルを推計することで、定式化の誤りの程度が大幅に上昇している可能性があることが分かる。よって、この点を検証するため、推計期間を変えたモデルで予測精度を比較したり、要因分解の結果についてより慎重な解釈を行う必要があるといえるだろう。

4 結論

本稿では、トレンドを考慮した DSGE モデルにおける確率的トレンドの導入が、モデルのデータへの当てはまりをどのように改善するかという点を DSGE-VAR モデルを用いて分析した。分析の結果、確率的トレンドを導入したモデルの方が、Smets and Wouters(2007) のような決定的トレンドモデルのそれよりも DSGE モデルの定式化の誤りの程度を測るパラメーターである λ^* の値が大きいことが確認された。さらに、その他の λ の値においても、一様に周辺尤度を大きくすることも確認された。また、以上の分析による特定化の誤りが、どの変数の波及経路を改善したことによるものなのかを特定化するため、各モデルの生産性ショックに対するベイジアン・インパルス応答関数と、DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答関数を比較した。その結果、決定的トレンドと DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答が大きく乖離していることから、生産性ショックに対して正の方向に反応する確率的トレンドモデルの方がデータからより支持されることが確認された。この結果は、従来の生産性ショックと労働時間に関する議論に関し、正の相関を持つという立場を支持しているといえる。しかし、先に述べたように、このメカニズムは全ての経済変数が同一のトレンドに従っており、生産性の上昇が即座にトレンドを持つ全変数に影響を与える、という強い仮定の下での結論であり、現実には消費や投資といった変数ごとに異なるトレンドを持っていると考えられる。この仮定を緩和し、変数ごとに異なるトレンドを持つモデルを構成し、生産性ショックに対する労働時間の反応を観察し、DSGE-VAR モデルを用いて定式化の誤りの程度を比較することもは有益であろう。また、日本のデータを用いて DSGE モデルを推計するに当たり、ゼロ金利を含めると定式化の誤りの程度が大幅に増加している可能性が示唆されたことから、この点の更なる検証が望まれる。例えば、推計期間を変えたモデルで予測精度を比較したり、Hirose and Kurozumi(2012) の要因分解の結果についてより吟味する必要があるだろう。また、ゼロ金利制約を考慮したモデルを推計することでこの点がいかにして改善されるかも興味深く、今後の研究に期待したい。

Appendix1 : 対数線形近似

各方程式や構造ショックの推移式を、廣瀬（2012）に従い定常状態の値を用いてトレンドを除去した変数について対数線形近似を行う。対数線形近似された式は以下の通りである。なお、 \tilde{x}_t は定常状態からの乖離を表す。

消費の限界効用

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta}{z}\right) \left(1 - \frac{\beta\theta}{z^\sigma}\right) \tilde{\lambda}_t &= -\sigma \left\{ \tilde{c}_t - \frac{\theta}{z} (\tilde{c}_{t-1} - z_t^z) \right\} + \left(1 - \frac{\theta}{z}\right) z_t^b \\ &+ \frac{\beta\theta}{z^\sigma} \left[\sigma \left\{ E_t \tilde{c}_{t-1} + E_t z_{t+1}^z - \frac{\theta}{z} \tilde{c}_t \right\} - \left(1 - \frac{\theta}{z}\right) E_t z_{t+1}^b \right] \end{aligned}$$

オイラー方程式

$$\tilde{\lambda}_t = E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \sigma E_t z_{t+1}^z + \tilde{R}_t^n - E_t \tilde{\pi}_{t+1}$$

賃金関数

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t - \tilde{w}_{t-1} + \tilde{\pi}_t - \gamma_w \tilde{\pi}_{t-1} + z_t^z \\ = \beta z^{1-\sigma} (E_t \tilde{w}_{t+1} - \tilde{w}_t + E_t \tilde{\pi}_{t+1} - \gamma_w \tilde{\pi}_t + E_t z_{t+1}^z) \\ + \frac{1 - \xi_w}{\xi_w} \frac{(1 - \beta \xi_w z^{1-\sigma} \lambda^w)}{\lambda^w + \chi(1 + \lambda^w)} (\chi \tilde{l}_t - \tilde{\lambda}_t - \tilde{w}_t + z_t^b) + z_t^w \end{aligned}$$

投資関数

$$\frac{1}{\xi} \{ \tilde{i}_t - \tilde{i}_{t-1} + z_t^z + z_t^i \} = \tilde{q}_t + \frac{\beta z^{1-\delta}}{\xi} \{ E_t \tilde{i}_{t+1} - \tilde{i}_t + E_t z_{t+1}^z + E_t z_{t+1}^i \}$$

資本稼働率関数

$$\tilde{u}_t = \mu (\tilde{R}_t^k - \tilde{q}_t)$$

トービンの q

$$\tilde{q}_t = E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \tilde{\lambda}_t - \sigma E_t z_{t+1}^z + \frac{\beta}{z^\sigma} \left\{ R^k E_t \tilde{R}_{t+1}^k + (1 - \delta) E_t \tilde{q}_{t+1} \right\}$$

最終財の資源制約

$$\tilde{y}_t = \frac{c}{y} \tilde{c}_t + \frac{i}{y} \tilde{i}_t + \frac{g}{y} z_t^g$$

NKPC

$$\tilde{\pi}_t - \gamma_p \tilde{\pi}_{t-1} = \beta z^{1-\sigma} (E_t \tilde{\pi}_{t+1} - \gamma_p \tilde{\pi}_t) + \frac{(1 - \xi_p) (1 - \beta \xi_p z^{1-\sigma})}{\xi_p} \tilde{m}c_t + z_t^p$$

金融政策ルール

$$\tilde{R}_t^n = \phi_r \tilde{R}_{t-1}^n + (1 - \phi_r) \left\{ \phi_\pi \left(\frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \tilde{\pi}_{t-j} \right) + \phi_y (\tilde{y}_t - \tilde{y}_t^*) \right\} + z_t^r$$

潜在生産量

$$\tilde{y}_t^* = -\alpha(1 + \phi) z_t^z$$

生産関数

$$\tilde{y}_t = (1 + \phi) \left\{ (1 - \alpha) \tilde{l}_t + \alpha (\tilde{u}_t + \tilde{k}_{t-1} - z_t^z) \right\}$$

限界費用

$$\tilde{m}c_t = (1 - \alpha) \tilde{w}_t + \alpha \tilde{R}_t^k$$

Appendix2 : Dynare による DSGE-VAR モデルの分析

本稿では、DSGE-VAR モデルの推計に MATLAB 上で動作する Dynare というプログラムを使用した。日本語での Dynare を用いた DSGE-VAR モデルに関する説明は存在しないことを鑑み、その分析手順の解説を行う。なお、Dynare を用いた DSGE モデルの標準的な分析方法に関しては江口 (2011)、廣瀬 (2012) に詳しいため、適宜そちらを参照されたい。本節では DSGE-VAR モデルの推計方法に絞って説明していく。本稿で紹介する方法は、Version が 4.2 以上の Dynare で使用することができる。

Dynare を用いて DSGE-VAR モデルを推計するには、通常のベイズ推計を行う場合の mod ファイルにわずかな変更を加えればよい。具体的には、mod ファイル上で、estimation パート内で dsge_var というコマンドを宣言する。もし、Del Negro and Schorfheide (2004) のように DSGE-VAR モデルの制約の強さを示すパラメーター λ の値をカリブレーションする場合は（例えば、 $\lambda = 1.5$ の時）以下のように指示を行う。

————— λ をカリブレーションする場合 —————

```
estimation(..., dsge_var = 1.5, ...);
```

もし、Adjemian, Darracq-Paris, and Moyen (2008) のように λ を一つのパラメーターとみなし、ベイズ推計を行う場合は estimated_params ブロック内で以下のように宣言を行う。

————— λ をハイパーパラメーターとして推計する場合 —————

```
estimated_params;  
...  
dsge_prior_weight, uniform_pdf, , , 0, 2;  
...  
end;  
estimation(..., dsge_var, ...);
```

なお、通常のパラメーターではないので、parameters パートに dsge_prior_weight と宣言する必要がない点に注意すべきである。また、本稿では VAR モデルのラグはデフォルトの 4 で分析を進めたが、以下のコマンドにより変更することも可能である。

————— VAR のラグを調節する場合 —————

```
estimation(..., dsge_var, dsge_varlag=8, ...);
```

なお、本稿で分析した DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答の出力には estimation パート内で bayesian_irf と宣言すればよい。この場合、DSGE モデルのベイジアン・インパルス応答が実線、DSGE-VAR モデルのベイジアン・インパルス応答が破線で出力される。

参考文献

- [1] 江口允崇 (2011) 『動学的一般均衡モデルによる財政政策の分析』 三菱経済研究所
- [2] 沖本竜義 (2010) 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』 朝倉書店
- [3] 加藤涼 (2007) 『現代マクロ経済学講義』 東洋経済新報社
- [4] 川崎能典 (1991) 「Baysian vector AutoRegression—その手法の整理と予測能力の検証」 日本銀行金融研究所「金融研究」第10巻1号
- [5] 繁樹算男 (1985) 『ベイズ統計学入門』 東京大学出版会
- [6] ゼルナー, A.(1986) 『ベイジアン計量経済学入門』 (福場庸・大沢豊共訳) 培風館
- [7] 藤原一平、渡部敏明 (2011) 「マクロ動学一般均衡モデル—サーベイと日本のマクロデータへの応用」 経済研究, 62(1), 66–93
- [8] 廣瀬康生 (2012) 『DSGE モデルによるマクロ実証分析の方法』 三菱経済研究所
- [9] 中妻照雄 (2003) 『ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析』 三菱経済研究所
- [10] 中妻照雄 (2007) 『入門ベイズ統計学』 朝倉書店
- [11] 松原望 (2010) 『ベイズ統計学概説 フィッシャーからベイズまで』 培風館
- [12] ランカスター, トニー (2011) 『ベイジアン計量経済学』 (小暮厚之・梶田幸作監訳) 朝倉書店
- [13] 渡部敏明 (2009) 「DSGE-VAR モデルの日本のマクロデータへの応用」 ESRI Discussion Paper Series,255-J
- [14] J.D. ハミルトン (2006) 『時系列解析 (上) 定常過程編』 (沖本竜義・井上智夫訳) シーエーピー出版
- [15] J.D. ハミルトン (2006) 『時系列解析 (下) 非定常/応用定常過程編』 (沖本竜義・井上智夫訳) シーエーピー出版
- [16] Adjemian, Stphane, Darracq P., Matthieu, and Moyen, Stphane(2008): “Towards a monetary policy evaluation framework” Working Paper Series 0942.
- [17] An, Sungbae, and Frank Schorfheide(2005):“Bayesian Analysis of DSGE Models,” *Econometric Reviews, Taylor and Francis Journals*, 26(2-4), 113-172.
- [18] Barsky, Robert B., and Eric R. Sims (2011): “News Shocks and Business Cycles.” *Journal of Monetary Economics*, 58(3), 273–289.
- [19] Calvo, G, A. (1983):“Shocks Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework.” *Review of Economics and Statistics*, 78(1): 1–15.
- [20] Cass, David (1964): “Optimum Economic Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem,” *Cowles Foundation Discussion Papers* 178.
- [21] Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Charles L. Evans (2005):“Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy,” *Journal of Political Economy*, 113(1), 1-45.
- [22] Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Robert Vigfusson. (2003): “What

- Happens after a Technology Shock?” NBER Working Paper 9819.
- [23] Del Negro Marco, and Frank Schorfheide (2004): “Priors from General Equilibrium Models for VARS. ” *International Economic Review*, 45(2), 643–673.
- [24] Del Negro Marco, and Frank Schorfheide (2006): “How Good Is What you’ve Got? DSGE-VAR as a Toolkit for Evaluating DSGE Models. ” *Economic Review*
- [25] Del Negro Marco, Schorfheide, Frank, Smets, Frank, and Wouters, Rafael (2007): “On the Fit of New Keynesian Models.” *Journal of Business and Economic Statistics*, 25, 123–143.
- [26] Del Negro Marco, Schorfheide, Frank (2010): “Bayesian Macroeconometrics,” *Handbook of Bayesian Econometrics*
- [27] Doan, Thomas, Robert B. Litterman, and Christopher A. Sims (1983): “Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions ” NBER Working Papers 1202
- [28] Francis, Neville, and Valerie A. Ramey. (2005) : “Is the Technology-Driven Real Business Cycle Hypothesis Dead? Shocks and Aggregate Fluctuations Revisited.” *Journal of Monetary Economics*, 52, 1379-99.
- [29] Gal, Jordi. (1999): “Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations?” *American Economic Review*, 89, 249–71.
- [30] Hirose, Y and T Kurozumi. (2012): “Do Investment-Specific Technological Changes Matter for Business Fluctuations? Evidence from Japan,.” *Pacific Economic Review* ; vol.17 no.2 208–230.
- [31] Ingram, Beth F., and Whiteman, Charles H. (1994): “Supplanting the ‘Minnesota’ prior: Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors.” *Journal of Monetary Economics*, 34(3), 497–510.
- [32] Justiniano, Alejandro, Giorgio E. Primiceri, and Andrea Tambalotti (2010): “Investment shocks and business cycles,” *Journal of Monetary Economics*, 57(2), 132–145.
- [33] Kaihatsu, Sohei and Takushi Kurozumi (2013): “Sources of Business Fluctuations: Financial or Technology Shocks?.” *Review of Economic Dynamics*
- [34] Kydland, Finn E., and Prescott, Edward C. (1982): “Time to Build and Aggregate Fluctuations,” *Econometrica*, 50(6), 1345–70.
- [35] Ramsey, F. (1928): “A Mathematical Theory of Saving,” *Economic Journal*, 152, 543-559.
- [36] Schorfheide, Frank (2000): “Loss function-based evaluation of DSGE models,” *Journal of Applied Econometrics*, 15(6), 645–670.
- [37] Sims, C. (2002): “Solving Linear Rational Expectations Model, ” *Computational Economics*, 20, 1–20.
- [38] Sims, C. (2003): “Comments on Smets and Wouters.”
available at <http://sims.princeton.edu/yftp/Ottawa/SWcommentSlides.pdf>
- [39] Smets, Frank, and Raf Wouters (2003): “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area,” *Journal of the European Economic Association*, 1(5),

1123–1175.

- [40] Smets, F and R, Wouters (2007): “Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach.” *American Economic Review* 39(s1), 35–65
- [41] Taylor, John B. (1993): “Discretion versus policy rules in practice,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 39(1), 195–214.